



Groupe ICHEC–ECAM–ISFSC

ICHEC

et



UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN  
LOUVAIN SCHOOL OF MANAGEMENT

Remise en cause du théorème central limite au profit des lois de puissance  
dans l'analyse des cours boursiers en période de forte volatilité.

Promoteur ICHEC : Madame Mathilde FOX

Mémoire présenté par

DE WEE Amaury

Pour l'obtention des grades de

Master en Gestion de l'Entreprise (ICHEC)

Master en Sciences de Gestion (LSM)

Année académique 2019 – 2020





Groupe ICHEC–ECAM–ISFSC

ICHEC

et



UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN  
LOUVAIN SCHOOL OF MANAGEMENT

Remise en cause du théorème central limite au profit des lois de puissance  
dans l'analyse cours boursiers en période de forte volatilité.

Promoteur ICHEC : Madame Mathilde FOX

Mémoire présenté par

DE WEE Amaury

Pour l'obtention des grades de

Master en Gestion de l'Entreprise (ICHEC)

Master en Sciences de Gestion (LSM)

Année académique 2019 - 2020

# Remerciements

La réalisation de ce mémoire n'aurait pas été possible sans la collaboration de certaines personnes, à qui je souhaiterais adresser toute ma reconnaissance.

Tout d'abord, j'aimerais remercier ma promotrice, Madame Mathilde Fox, qui, malgré la période difficile que nous traversons actuellement, fut disponible tout au long de la rédaction de ce mémoire. À travers sa rigueur scientifique, ses conseils judicieux ainsi que son expertise dans le domaine de la recherche, elle m'apporta tous les ingrédients nécessaires à la réalisation de ce mémoire dans les meilleures conditions.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers mon professeur de statistique Monsieur Mohamed Selmouni pour ses conseils avisés et son assistance pour les parties statistiques de mon mémoire.

Mes remerciements s'adressent aussi à l'ensemble du corps professoral de l'ICHEC où j'ai passé mon Bachelier et mon Master ainsi qu'au corps professoral de la LSM où j'ai eu la chance de réaliser une partie de mon Master.

Finalement, je tiens à exprimer ma reconnaissance à l'ensemble de mes proches, famille et amis, pour m'avoir accompagné et soutenu durant la rédaction de ce mémoire. Je remercie particulièrement Cédric Tits pour son aide durant mon apprentissage du logiciel R ainsi que Gaïa Dufour, pour ses encouragements et pour la relecture de ce mémoire.

## Engagement Anti-Plagiat du Mémoire

Je soussigné, DE WEE, Amaury, Master 2 (2019-2020), déclare par la présente que le Mémoire ci-joint est exempt de tout plagiat et respecte en tous points le règlement des études en matière d'emprunts, de citations et d'exploitation de sources diverses signé lors de mon inscription à l'ICHEC, ainsi que les instructions et consignes concernant le référencement dans le texte respectant la norme APA, la bibliographie respectant la norme APA, etc. mises à ma disposition sur Moodle.

Sur l'honneur, je certifie avoir pris connaissance des documents précités et je confirme que le Mémoire présenté est original et exempt de tout emprunt à un tiers non-cité correctement.

Dans le cadre de ce dépôt en ligne, la signature consiste en l'introduction du mémoire via la plateforme ICHEC-Student.

# Table des matières

Chapitre 1 : Introduction .....	1
Contextualisation : impact du Covid-19 sur mon mémoire.....	5
Chapitre 2 : L'École classique selon Markowitz.....	6
2.1 Théorie moderne du portefeuille : introduction à la diversification.....	6
2.1.1 Hypothèses .....	6
2.2 Théorie moderne du portefeuille selon H. Markowitz .....	9
2.2.1 Markowitz et la notion de risque.....	9
2.2.2 Loi normale .....	9
2.2.2.1 Notions de base .....	9
2.2.2.2 Pourquoi la loi normale ? .....	11
2.2.2.3 Loi normale quelconque.....	12
2.2.2.4 Loi normale centrée réduite ou loi normale standard.....	12
2.2.3 Modèle mathématique .....	13
2.2.3.1 Rentabilité .....	14
2.2.3.2 Risque.....	15
2.2.4 La construction du portefeuille selon Markowitz.....	17
2.2.4.1 Loi de la covariance moyenne.....	18
2.2.4.2 Création de la frontière d'efficience.....	22
2.2.5 Conclusion du modèle de Markowitz.....	25
2.3 Modèles complémentaires et applications de la MPT.....	25
2.3.1 Sharpe : combien vaut un actif ? .....	25
2.3.1.1 L'analyse de portefeuille.....	26
2.3.1.2 Modèle diagonal .....	27
2.3.1.3 Le MEDAF.....	28
2.3.1.4 L'analyse de la performance des portefeuilles : le ratio de Sharpe...	37
2.3.2 Black & Scholes .....	39
2.3.2.1 Introduction .....	39
2.3.2.2 Hypothèses et argument central .....	39
2.3.2.3 Modèle mathématique .....	40
2.3.2.4 Autres contributions .....	41
2.3.3 Fama et le modèle à trois facteurs .....	41
2.3.3.1 Introduction .....	41
2.3.3.2 Le modèle à trois facteurs .....	42
2.3.3.3 Autre contribution .....	43
Chapitre 3 : Remise en cause du modèle classique .....	44
3.1 Limites théoriques et empiriques .....	44

3.1.1	Limites théoriques .....	44
3.1.2	Limites empiriques .....	45
3.1.3	Conclusion.....	46
3.2	Les cours boursiers : une distribution normale ?.....	47
3.2.1	Le choc Bachelier-Mandelbrot.....	47
3.2.2	Compte rendu illustré .....	48
3.3	Test de normalité .....	62
3.3.1	Test de Jarque-Barre.....	62
3.3.2	Test de Shapiro-Wilk .....	63
3.3.3	Autres tests .....	63
Chapitre 4 : Les lois de puissance : une vision stochastique des marchés .....		66
4.1	So what ? .....	66
4.1.1	Long-Term Capital Management LP .....	66
4.2	Les lois de puissance .....	67
4.2.1	Pourquoi les lois de puissance ? .....	67
4.2.2	Loi de puissance .....	68
4.2.3	L'utilisation des lois de puissance : une vision stochastique .....	70
4.3	Vilfredo Pareto : la distribution des patrimoines.....	71
4.3.1	Comment le phénomène d'autorenforcement pousse à la spéculation.....	73
4.4	Les rendements boursiers : une distribution en loi de puissance ?.....	74
4.4.1	Données analysées.....	74
4.4.2	Méthodologie .....	75
4.4.3	Résultats .....	76
4.4.3.1	Tester l'hypothèse de loi de puissance .....	76
Chapitre 5 : Pour aller plus loin : quelques modèles alternatifs .....		80
5.1	Benoit Mandelbrot et les fractales.....	80
5.1.1	Un peu d'histoire.....	80
5.1.2	Définition et lexicologie.....	80
5.1.2.1	Fractale .....	80
5.1.2.2	Géométrie fractale .....	81
5.1.3	Propriétés : Auto-similarité et auto-affinité.....	81
5.1.3.1	Une fractale linéaire : l'auto-similarité .....	81
5.1.3.2	Une fractale irrégulière : l'auto-affinité .....	83
5.1.4	La création d'un modèle multifractal : Les syndromes de Joseph et de Noé .....	84
5.1.5	Conclusion.....	85
5.2	De nouvelles mesures de risque : Extreme Value Theory et Expected Shortfall .....	86
5.2.1	La VaR et ses limites.....	86
5.2.1.1	L'Extreme Value Theory .....	88
5.2.2	Expected Shortfall .....	91

Chapitre 6 : Conclusion et limites .....	93
Bibliographie. ....	96



## Liste des figures

Figure 1 : représentation de la distribution d'une loi normale	11
Figure 2 : Diversification du risque d'un portefeuille	17
Figure 3 : frontière efficiente	24
Figure 4 : droite de marché des capitaux	31
Figure 5 : Security Market Line	33
Figure 6 : rendement d'un actif en fonction de son bêta	34
Figure 7 : droite caractéristique d'un titre	35
Figure 8 : Ratio de Sharpe	38
Figure 9 : prix de clôture journaliers S&P 500 1980-2020	49
Figure 10 : variations quotidiennes S&P 500 1980-2020	49
Figure 11 : Prix de clôture journaliers S&P 500 1980-2020 échelle log.	50
Figure 12 : rendement logarithmique S&P 500 1980-2020	50
Figure 13 : prix de clôture journaliers mouvement brownien géométrique 1980-2020	52
Figure 14 : comparaison S&P 500 vs mouvement brownien géométrique	52
Figure 15 : variations quotidiennes GBM	53
Figure 16 : variations quotidiennes S&P 500 en écart-type	53
Figure 17 : variations quotidiennes GBM en écart-type	54
Figure 18 : variations quotidiennes GBM en écart-type bis	54
Figure 19 : types de kurtosis	56
Figure 20 : types de skewness	57
Figure 21 : histogramme S&P 500 1980-2020	60
Figure 22 : Histogramme échantillon variables aléatoires normales	60
Figure 23 : Histogramme échantillon GBM	61
Figure 24: daily profits and losses of four of the biggest banks	67
Figure 25: loi de puissance	69
Figure 26 : distribution de Pareto	72
Figure 27 : Représentation du processus de fabrication du « flocon de Koch »	82
Figure 28 : représentation du phénomène de fractale dans la nature.	83
Figure 29 : simulation de la courbe de Von Koch irrégulière.	84
Figure 30 : fractales auto-affines	84
Figure 31 : densité de probabilité de la fonction de Fréchet	90

## Liste des tableaux

Tableau 1 : matrice variances-covariances	23
Tableau 2 : résultats échantillon normal	58
Tableau 3 : test kurtosis & skewness échantillons S&P 500	59
Tableau 4 : résultats test de Jarque-Barre	63
Tableau 5 : résultats test de Shapiro-Wilk	63
Tableau 6 : résultats tests échantillon complet	64
Tableau 7 : résultats tests échantillon Black Monday	64
Tableau 8 : résultats tests bulle internet	64
Tableau 9 : résultats tests échantillon subprimes	64
Tableau 10 : résultats tests échantillon covid	65
Tableau 11 : résultats tests échantillon sans crise	65
Tableau 12 : résultats tests échantillon normal	65
Tableau 13 : résultats goodness-of-fit	77
Tableau 14 : résultats likelihood-ratio test	78

## Abstract

Le modèle classique de la finance apparaît dans les années 1960 aux États-Unis, avec la création de ce qui deviendra la « théorie moderne du portefeuille » de Harry Markowitz. Depuis sa sortie, ce modèle n'a cessé d'être remis en cause, et ce, malgré les nombreux compléments qui lui ont été apportés au cours du temps afin d'en suppléer les carences (Sharpe, Fama...).

Cependant, il est aujourd'hui encore le modèle dominant, utilisé par la plupart des spécialistes dans l'analyse de l'impact de différents événements sur les cours boursiers et dans la gestion de portefeuille d'actifs financiers. Cette réticence au changement s'explique notamment par la facilité d'utilisation de cette méthode, et par le fait qu'elle fonctionne, en théorie, pour la majorité des situations de marchés. Cette théorie a cependant des limites. Dès que l'on sort du cadre des situations de marchés les plus communes et que l'on entre en période de forte volatilité des cours, cette théorie s'effondre puisqu'elle ne tient pas (ou peu) compte des valeurs extrêmes. Ces périodes de forte volatilité sont supposées être rarissimes, mais les crises successives que le système financier subit depuis les années 1930 nous poussent à penser le contraire !

Une autre raison qui incite les économistes à se tourner vers la théorie classique est le manque d'alternative. L'objectif de ce mémoire est donc non seulement de remettre en cause le modèle classique de la finance, et plus particulièrement son hypothèse de normalité des rendements boursiers, mais également de présenter les lois de puissance comme alternative, à l'aide de deux modèles les utilisant : le modèle fractal et l'Extreme Value Theory. Pour ce faire, je réalise deux analyses empiriques. La première a pour but de vérifier l'hypothèse de normalité des rendements, la deuxième a pour objectif de tester la compatibilité d'une loi de puissance avec un échantillon de rendements boursiers.

# Chapitre 1 : Introduction

## I) Mise en situation de la problématique

Le modèle classique de la finance fait son apparition dans les années 1960. À travers un article publié en 1952 (Markowitz, 1952) et une thèse qu'il défendra en 1955 à Chicago, Harry Markowitz crée ce qui deviendra « la théorie moderne du portefeuille » (MPT). Ce modèle réunit une multitude de travaux qui se basent sur deux postulats principaux : la rationalité individuelle et l'efficience informationnelle des prix.

Depuis son apparition, de nombreuses critiques ont été émises envers le paradigme classique de la finance au travers d'une multitude de travaux académiques. De plus, les récentes crises financières n'ont fait qu'alimenter cette remise en question, avec quelques critiques qui ressortent assez souvent, de la bouche de la presse, du grand public, ou même de spécialistes et enseignants-chercheurs : on peut notamment citer :

- ▽ Les économistes financiers auraient dû prévoir ces crises.
- ▽ L'approche néoclassique, en supposant une rationalité forte, pousse les individus à se comporter de manière individualiste voire égoïste, allant jusqu'à mettre en danger leurs organisations, ce qui, in fine, a provoqué la crise financière.
- ▽ La finance est totalement découplée de la réalité et de la pratique financière dû à son utilisation d'hypothèses irréalistes.

Bien que certains jugements soient quelque peu sévères voir injustes, on ne peut s'empêcher d'y discerner une part de vérité. Au fil du temps, de nombreux théoriciens ont donc tenté de déterminer quelles sont exactement les limites de ce modèle, afin d'y remédier dans la mesure du possible, ou de lui trouver une alternative. C'est donc dans ce cadre de doute, de jugement et de crainte des crises financières que je remets en question l'utilisation de la loi normale dans l'analyse des cours boursiers et que je lui propose les lois de puissance comme alternative.

## II) Revue de la littérature.

Une des remises en cause d'un des modèles classiques fut des plus étonnante puisqu'elle se produit au sein même de ce « bunker » néoclassique. Dans une publication surnommée par après « beta is dead » (Fama, 1992), Fama et French, deux fervents défenseurs de la théorie orthodoxe, remettent en cause le Medaf (modèle d'évaluation des actifs financiers), ou plutôt son utilisation du bêta comme seule mesure du risque. Ils présentent alors le Three factor model que j'expliquerai plus tard dans ce mémoire.

Un autre auteur célèbre et plus contemporain pour son désaccord avec l'utilisation de la théorie moderne du portefeuille et ses applications est Nassim Nicholas Taleb. Ce dernier, à travers de nombreux articles et ouvrages remet en question les hypothèses sur lesquelles se base le modèle classique en les décrivant comme simplificatrices à

outrance, l'hypothèse la plus irréaliste étant selon lui la normalité des rendements. Il considère alors l'utilisation d'une loi de puissance ou d'une loi de Pareto étant plus appropriée. Il introduit alors la théorie des Black Swan en finance et l'Extreme Value Theory (EVT) qui se concentrent sur l'impact extrême des événements rares et imprévisibles (Taleb, 2007).

Des alternatives furent également proposées durant les dernières décennies. On retrouve notamment la finance comportementale, qui cherche à intégrer des dimensions psychologiques et institutionnelles aux modèles existants. Ce courant est défendu par de nombreux auteurs, tels que Michel Albouy et Gérard Charreaux (2005) dans leur ouvrage « La finance comportementale ou l'émergence d'un nouveau paradigme dominant ? », Schinckus (2009) avec l'article « la finance comportementale ou le développement d'un nouveau paradigme » ou encore Baker et Wurgler (2011) avec « Behavioral Corporate Finance : An Updated Survey ». On retrouve également la finance fractale proposée par Benoit Mandelbrot qu'il développe dans son ouvrage « the misbehaviour of market » que je présenterai à la fin de ce mémoire (Mandelbrot et Hudson, 2006). Le modèle n'est pas pour autant resté statique au fil du temps puisque de nombreux auteurs ont cherché à le compléter. On retrouve bien évidemment les contributeurs principaux tels que Treynor (1961) et Sharpe (1964) avec la création du MEDAF, Black, Scholes et Merton avec le modèle d'évaluation d'option en 1973, Fama & French à nouveau avec le Three factor model.

On retrouve également des apports cherchant à corriger ou améliorer certaines étapes du modèle classique tels que l'estimateur de Ledoit & Wolf (2004) qui permet de corriger les erreurs d'estimation de la matrice variance-covariance, le modèle GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedacty), extension du modèle ARCH, introduit par Robert F. Engle en 2002 et utilisé couramment dans la modélisation de séries temporelles financières puisqu'il permet une meilleure prévision de la volatilité à court terme ou encore la volatilité EMWA (exponentially weighted moving average volatility) qui donne également de meilleures prévisions de la volatilité en accordant un poids plus important aux données plus récentes et moins important aux données plus anciennes et donc moins représentatives.

Bref, les modèles n'ont cessé d'être raccommodés et corrigés afin de correspondre au mieux à la réalité. Mais est-ce le cas ? Dans le cadre de ce mémoire, je vais donc tenter de déterminer si le paradigme classique de la finance correspond à la réalité en remettant en question l'hypothèse principale sur laquelle il se repose : la normalité des rendements boursiers.

### **III) Méthodologie**

- Il est tout d'abord primordial d'introduire le modèle classique de la finance au travers de la théorie moderne du portefeuille de Harry Markowitz. Le second

chapitre se concentre donc sur l'analyse de ce modèle, des hypothèses qu'il émet à propos du marché et de ses acteurs ainsi que des éléments le composant (rendement, risque, distribution normale...). Je présente ensuite les ajouts et corrections de différents auteurs fondateurs de l'école classique dont les modèles ou applications se reposent également sur l'hypothèse de normalité des rendements boursiers.

- Le troisième chapitre constitue ma remise en cause de la théorie classique à travers son hypothèse de normalité des rendements boursiers. Premièrement, je présente les différentes faiblesses théoriques et empiriques du modèle classique. Je réalise ensuite une analyse empirique sur plusieurs échantillons tirés du S&P 500 afin de déterminer si ce dernier suit ou non une distribution normale. Cette analyse est constituée de trois parties distinctes : la première est un compte-rendu illustré dans lequel je compare des graphiques réalisés sur le cours du S&P 500 avec des graphiques obtenus à partir d'un cours de bourse fictif créé à partir d'un mouvement brownien géométrique. Cette première partie est à caractère instructif et a pour objectif d'introduire le lecteur aux différences entre un cours de bourse fictif réalisé à partir de l'hypothèse de normalité et la réalité des cours de bourses. La seconde partie est une étude du kurtosis et de la skewness de mes échantillons afin de déterminer si ceux-ci correspondent aux critères d'une loi normale. Je conclus ensuite ce chapitre en réalisant une multitude de tests de normalités sur mes échantillons.
- Le chapitre suivant se concentre lui sur la présentation des lois de puissance comme une alternative à la loi normale. J'introduis ce chapitre en présentant un cas réel où la sous-estimation des événements extrêmes à travers l'utilisation du modèle classique s'est révélée fatale pour des investisseurs : le fonds LTCM. Je présente ensuite les lois de puissance en introduisant brièvement les travaux de leur auteur fondateur ; Vilfredo Pareto afin de montrer pourquoi cette distribution correspond mieux à la réalité. Je réalise finalement une analyse empirique de mes échantillons afin de vérifier l'hypothèse qu'une autre forme de loi peut mieux représenter la réalité de l'évolution des marchés que la loi normale en posant l'hypothèse qu'une loi de puissance pourrait la remplacer. Cette analyse est faite en trois parties : premièrement, j'estime les paramètres de mon échantillon afin de pouvoir créer une loi de puissance correspondant à mes données. Je réalise ensuite un test de goodness-of-fit afin d'analyser si la loi de puissance est une hypothèse plausible pouvant expliquer la distribution de mes données. Je compare finalement la compatibilité de mes données avec la loi de puissance par rapport à leur compatibilité avec la loi normale à l'aide d'un likelihood-ratio test.
- Je conclus finalement mon mémoire en présentant deux alternatives à la théorie moderne du portefeuille qui ont la particularité de ne pas poser l'hypothèse de

normalité des rendements boursiers : le modèle fractal, introduit par Benoit Mandelbrot mais encore dans un cadre fort conceptuel et l'Extreme Value Theory, une approche alternative du calcul de la VaR ainsi que son extension, l'Expected Shortfall.

## Contextualisation : impact du Covid-19 sur mon mémoire

Initialement, mon sujet de mémoire consistait en l'analyse des différents produits offerts par la Bourse du Luxembourg où je réalisais mon stage, plus particulièrement les produits offerts par Luxembourg Green Exchange, qui est une plateforme uniquement dédiée à la finance responsable. Je devais pour cela passer quelques jours dans ce département, afin d'observer lesdits produits de plus près et de réaliser des entretiens auprès des personnes qui travaillent dessus.

J'ai cependant dû complètement changer de direction mi-mars, lorsque le Luxembourg est entré en confinement. Ayant été envoyé en télétravail, je n'avais plus accès aux outils avec lesquels je travaillais lors de mon stage et qui m'auraient permis de sortir facilement des données boursières (Bloomberg...). Au vu de la situation, il m'était également difficile de rentrer en contact avec les responsables du département LGX, et encore plus compliqué d'organiser un transfert temporaire dans leur département.

Heureusement, étant fort concentré sur mon étude du CFA, je n'étais encore qu'au début de la rédaction de mon mémoire, j'ai donc décidé de changer de sujet, et de recommencer à zéro. Outre la recherche de données rendue plus difficile en l'absence d'accès à Bloomberg, le reste de mon mémoire s'est déroulé sans encombre.

## Chapitre 2 : L'École classique selon Markowitz

Le paradigme dominant : la théorie économique néoclassique.

### **2.1 Théorie moderne du portefeuille : introduction à la diversification**

Le marché financier est le lieu où se rencontrent l'offre et la demande de capitaux à long terme. Les investisseurs y prennent des positions courtes et longues dans une multitude d'actifs financiers. Ces actifs détenus par les investisseurs forment ce que l'on appelle un portefeuille d'actifs financiers dont la valeur sera, en fonction des positions détenues, influencée positivement ou négativement par les fluctuations des cours des titres. Ces fluctuations sont dues à une multitude de facteurs. On retrouve notamment des facteurs internes à l'entreprise, telle qu'une annonce de résultats supérieurs aux attentes ou l'annonce d'une augmentation du montant des dividendes distribués. Il existe également les facteurs dits macroéconomiques, liés au secteur d'activité de l'entreprise dans laquelle on investit. Différents secteurs réagiront de manière différente, voire parfois de manière opposée face à certains chocs économiques. Les secteurs dépendants de la conjoncture seront qualifiés de cycliques, alors que les secteurs indépendants de la conjoncture sont appelés secteurs non-cycliques, on y retrouve les valeurs de croissance qui sont plus constantes tels que les secteurs des télécoms ou de la santé. Afin de ne pas se surexposer aux variations de cours d'un secteur ou d'une entreprise en particulier, il est donc important de suivre un adage devenu célèbre au fil du temps : « Il ne faut pas mettre tous ses œufs dans le même panier ».

Il faut, en d'autres mots, **diversifier** son portefeuille. Avoir un portefeuille diversifié permet tout simplement de « lisser » le risque. Les titres constituant un portefeuille ne doivent donc pas être choisis arbitrairement, et c'est là que la théorie moderne du portefeuille entre en jeu.

Cette notion de diversification du portefeuille fut introduite par Harry Markowitz, né en 1927 à Chicago, créateur de la théorie moderne du portefeuille, et souvent considéré comme le fondateur de la finance moderne ou néoclassique. C'est donc majoritairement par l'analyse de ses travaux que je vais réaliser mon étude sur la validité du modèle de finance traditionnel (*Harry M. Markowitz Biographical*, 1990).

#### **2.1.1 Hypothèses**

Comme expliqué dans l'introduction, afin d'entreprendre la remise en cause du modèle néoclassique, il est important de le comprendre. Et cette compréhension du modèle commence avec la présentation des hypothèses émises par ses auteurs. La théorie moderne du portefeuille de Harry Markowitz repose sur 6 hypothèses (de Marnix, 2018)

:



➤ **Hypothèse 1 : Aversion au risque.**

Les investisseurs sont averses au risque. Ils accepteront donc de prendre plus de risque uniquement si ce risque est accompagné d'une augmentation de rendement attendu. Ce ratio rendement/risque est propre à chaque investisseur et dépend de son profil d'investisseur ainsi que de son aversion au risque.

➤ **Hypothèse 2 : Rationalité des investisseurs.**

Chaque investisseur va réagir de manière rationnelle et cohérente face à l'arrivée d'une nouvelle information sur le marché. L'investisseur va donc chercher à maximiser son utilité, qui dépend de deux facteurs, la variance (risque) et le rendement. L'investisseur tente de maximiser ce rendement par rapport à un niveau de risque donné, ou minimiser le risque pour un niveau de rendement donné.

$$\mu_x \geq \mu_y \quad \& \quad \mu_y \geq \mu_z \quad \rightarrow \quad \mu_x \geq \mu_z$$

Avec  $\mu_x, \mu_y, \mu_z$  comme utilité des actifs x, y et z, produit du couple risque/rendement.

➤ **Hypothèse 3 : Horizon d'investissement.**

L'horizon d'investissement détermine la période durant laquelle les investisseurs peuvent se passer de l'argent investi. Il correspond donc au temps de retenue des actifs par l'investisseur. Dans sa théorie, Markowitz estime que cet horizon est le même pour tous les investisseurs et qu'il est constitué d'une période unique, ce qui signifie qu'il considère uniquement un investissement sans possibilité de réinvestissement.

➤ **Hypothèse 4 : Distribution normale des rendements.**

Markowitz défend que les rendements des actifs financiers suivent une distribution gaussienne, qui, par définition, dépend de deux moments, l'espérance (moyenne) et la variance (et l'écart-type), qui vont respectivement déterminer le bénéfice espéré et le risque pris. Effectivement la loi normale stipule que les valeurs des variables aléatoires varient autour de la moyenne, on peut donc espérer un bénéfice proche de cette moyenne, et que l'ampleur de ces variations dépend de la variance de la distribution, qui représente donc le risque que le bénéfice prenne une valeur différente de la moyenne. Pour rappel, le moment d'une variable aléatoire est un indicateur de sa dispersion. Les deux premiers moments (espérance et variance) sont les plus communément utilisés. Dans le cadre de ce mémoire, j'analyserai également les 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> moments, qui sont respectivement la skewness et le kurtosis.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

$$\text{Avec } \mu = \text{Moyenne} \ \& \ \sigma^2 = \text{Variance}$$

$$X = \text{variable aléatoire et } N \text{ une loi normale de paramètre } \mu \text{ et } \sigma^2$$

- Hypothèse 4<sub>bis</sub> : Hypothèse des variations continues.

Cette hypothèse suggère que les variations de prix suivent un mouvement continu, elles n'effectuent donc pas de saut d'un prix à l'autre mais passent lentement d'une valeur à l'autre en passant par toutes les valeurs intermédiaires.

➤ **Hypothèse 5 : Les marchés sont parfaits.**

L'efficacité des marchés financiers stipule que les prix des actifs sur les marchés financiers reflètent correctement et à tout moment toute l'information disponible. Cela signifie donc qu'il est impossible de battre le marché de manière répétitive puisque seule l'apparition de nouvelles informations fait varier le cours des actifs financiers, nouvelles informations qui, par définition, sont imprévisibles.

Bien que rattachée à la théorie moderne du portefeuille, la paternité de l'hypothèse d'efficacité du marché est souvent attribuée à Eugène Fama grâce à ses articles fondateurs publiés en 1970.

Fama (1970) distingue trois formes d'efficacité :

- ▽ Efficacité faible : le marché reflète parfaitement l'information contenue dans les cours historiques. Les investisseurs ne peuvent donc pas réaliser de profits en réalisant une analyse technique (basée sur l'analyse des cours historiques). Les fluctuations de cours d'un titre suivent une marche aléatoire et son prix actuel est indépendant des informations passées concernant ce titre.
- ▽ Efficacité semi-forte : les cours boursiers actuels reflètent non seulement les informations passées, mais également toutes les informations publiques au sujet de l'entreprise dès qu'elles sont disponibles. Cela signifie qu'il n'y a aucun décalage temporel entre le moment où une information devient publique et son intégration au prix de l'actif. Cette notion d'instantanéité empêche les investisseurs de réaliser un profit anormal en effectuant une analyse fondamentale (analyse des comptes de résultat, bilan comptable...).
- ▽ Efficacité forte : Toute information, publique ou non, est instantanément intégrée dans les cours boursiers. Il n'est donc pas possible, même en étant un « initié », de tirer parti d'informations non publiques afin de réaliser un profit anormal.

Cette notion d'efficacité des marchés sous-entend également que l'information soit transparente, sans frais, et accessible à tous.

En plus de l'efficacité des marchés, avoir un marché parfait requiert également l'absence totale de coûts de transactions. Les investisseurs peuvent ainsi pleinement profiter de toute opportunité d'arbitrage, sans barrière d'entrée ni de sortie.

- Hypothèse 5<sub>bis</sub> : Indépendance temporelle (iid).

L'hypothèse d'efficacité des marchés impose que les rendements des actifs financiers soient imprévisibles, ils sont alors supposés iid, c'est-à-dire indépendants (les rendements dans le temps sont indépendants les uns des autres, le rendement en  $t-1$  n'aura pas d'impact sur le rendement en  $t$ ) et identiquement distribués (les rendements obtenus suivent tous une même loi de probabilité).

➤ **Hypothèse 6 : Corrélation entre les rendements.**

La corrélation entre deux rendements ou plus exprime la relation existante entre les cours boursiers de ces deux actifs financiers. Celle-ci démontre la liaison entre les cours telle que les variations de leurs valeurs soient de même sens (corrélation positive) ou de sens opposé (corrélation négative).

La théorie moderne du portefeuille pose l'hypothèse que les rendements des différents actifs ne sont pas indépendants les uns des autres, ils ont donc une corrélation non nulle.

$$(cov(R_a, R_b)) \neq 0 \text{ ou } \rho_{ab}(R_a, R_b) = \frac{cov(R_a, R_b)}{\sigma_{Ra} \sigma_{Rb}} \neq 0$$

Avec  $\rho_{ab}$  est le coefficient de corrélation des actifs  $a$  et  $b$

## **2.2 Théorie moderne du portefeuille selon H. Markowitz**

### **2.2.1 Markowitz et la notion de risque**

En 1952, Harry Markowitz met le doigt sur le problème central de la finance, le risque. Alors qu'à l'époque, les ouvrages les plus réputés, comme par exemple « The Theory of Investment Value » de John Burr Williams (Williams, 1938), traitent les flux futurs des entreprises (dépenses et gains) comme certains, Markowitz, lui, les voit comme incertains et considère que cette incertitude rend les actions risquées.

Markowitz va alors révolutionner le domaine de la gestion de portefeuille en introduisant cette notion de risque dans un processus de sélection de titres ayant pour but de créer le portefeuille le plus efficient possible. À la base de ce processus se trouve une idée-force : la rentabilité d'un actif financier est assimilée à une variable aléatoire suivant une loi normale. Il s'ensuit que le risque de cet actif financier peut être mesuré aisément à l'aide de l'écart-type des taux de rentabilité qu'il offre. En suivant cette idée, il est donc possible de créer des portefeuilles optimaux qui offriront une rentabilité maximale pour un risque donné, ou un risque maximal pour une rentabilité donnée. Ces portefeuilles sont considérés comme « efficients » (Albouy et Charreaux, 2017).

### **2.2.2 Loi normale**

#### **2.2.2.1 Notions de base**

Avant de se lancer dans l'explication de la loi normale, il est primordial d'introduire quelques concepts fondamentaux aux lois de probabilité. L'objectif principal de l'utilisation d'une de ces lois en finance est de décrire les mouvements des cours financiers en les considérant comme des variables aléatoires. Définissons donc ce concept de **variable aléatoire** :

### Variable aléatoire

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est  $\Omega$ . Une variable aléatoire est une application de l'univers  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \omega \rightarrow X(\omega)$$

Où  $\omega$  est un événement élémentaire de  $\Omega$ .

Une variable aléatoire permet donc d'associer un nombre réel à des événements aléatoires élémentaires de  $\Omega$ . Cela permet de comparer des situations qui ne sont pas comparables de base et ainsi de discerner des comportements de hasard similaires entre des situations différentes.

Une variable aléatoire peut être de deux formes distinctes : discrète ou continue.

- Une variable aléatoire  $X$  est dite discrète si elle ne prend que des valeurs discontinues dans un intervalle donné (borné ou non borné) ;
- Une variable aléatoire  $X$  est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné (borné ou non borné).

Dans le cas de la théorie moderne du portefeuille, Markowitz voit les rendements des cours boursiers comme des variables aléatoires continues (puisqu'il utilise la loi normale, qui est une loi continue).

Avoir affaire à des variables aléatoires continues signifie qu'il est impossible d'associer une probabilité ponctuelle à chacune des valeurs possibles de  $X$ , ou tout du moins que cette probabilité serait égale à zéro, comme on pourrait le faire dans le cas d'une loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète. Dans le cas continu, on parlera plutôt de la **densité de probabilité**, qui est une courbe dessinée au-dessus de l'axe horizontal sous laquelle l'aire vaut 1. En pratique, cette densité de probabilité est peu utilisée pour déterminer les probabilités de valeurs ponctuelles, on utilisera alors la fonction de répartition afin de déterminer la probabilité d'occurrence des différents événements.

### Fonction de répartition :

Soit une variable aléatoire  $X$  continue et définie sur un univers  $\Omega$  et la loi de probabilité  $f$  associée. Dans ce cas :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

où  $F(x)$  est appelée fonction de répartition de la variable aléatoire et est une fonction

$$F(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1] : x \rightarrow \int f(x) dx.$$

Source : (Tits, 2020)

Une autre notion importante lorsqu'on étudie la distribution normale est la courbe de Gauss, ou courbe gaussienne. Cette dernière est la représentation graphique de la densité de la loi normale. Sa forme en cloche montre une forte concentration des valeurs autour de la moyenne et une concentration de plus en plus faible aux extrémités (les queues de

la distribution). Dans le cas le plus connu, la courbe de Gauss non-centrée et non-réduite, elle s'écrit (Bru, 2006) :

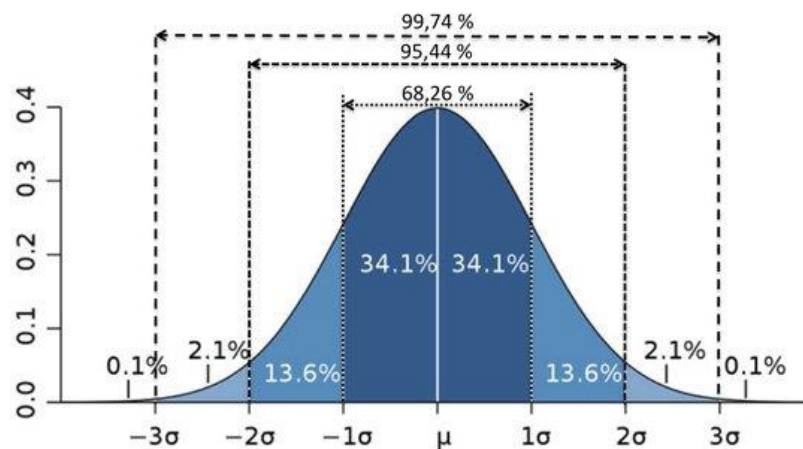
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Avec  $\pi = \text{pi} = 3,14159\dots$

$e$  = base des logarithmes népériens = 2,71828...

et a la forme suivante :

**Figure 1** : représentation de la distribution d'une loi normale



Source : Michel, H. (2015, 15 janvier). Loi normale. Consulté le 1 mai 2020, à l'adresse <http://www.ilovestatistics.be/probabilite/loi-normale.html>

### 2.2.2.2 Pourquoi la loi normale ?

Le choix de la loi normale s'explique par le fait que celle-ci s'applique, en théorie, à n'importe quel phénomène entraîné par des causes multiples et indépendantes entre elles. Cette distribution est donc censée correspondre parfaitement aux variations relatives des cours boursiers dans le temps, puisque celles-ci sont provoquées par une multitude de facteurs positifs ou négatifs dont la résultante est incertaine.

Cette loi, présentée par le Français Laplace et l'Allemand Gauss, va être intégrée par Markowitz dans son modèle qui l'utilise afin d'expliquer les rendements des différents actifs financiers, donc la variation relative de leurs cours durant un intervalle de temps. La représentation graphique de cette loi, une courbe en cloche, est aujourd'hui mondialement connue et sert de référence aux autres lois statistiques (Albouy et Charreaux, 2017).

#### Loi normale quelconque.

Soient deux réels  $\mu$  et  $\sigma > 0$ . On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit une loi normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$  (notée  $N(\mu ; \sigma^2)$ ) si sa densité de probabilité  $f$  est définie par :

$$f_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Source: (Tits, 2020)

#### 2.2.2.3 Loi normale quelconque

La loi normale est une courbe symétrique en forme de cloche représentée à partir de deux paramètres : la moyenne  $\mu$  et l'écart-type  $\sigma$ . On dit qu'une variable  $X$  suit le modèle de la loi normale  $N(\mu, \sigma)$  en écrivant :  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

Il est important de préciser que lorsqu'on parle de moyenne et d'écart-type dans le cadre de la loi normale, on parle des paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  qui définissent la distribution gaussienne, et non de l'espérance mathématique et de l'écart-type qui sont des opérateurs associés à des lois de probabilité de manière générale.

Ainsi, des lois normales peuvent avoir des moyennes et écarts-types différents, ce qui entraînera des représentations graphiques différentes :

- Une variation de la moyenne  $\mu$  entraînera une variation horizontale de la courbe :
  - Vers la droite si  $\mu$  est plus grand ;
  - Vers la gauche si  $\mu$  est plus petit.
- Une variation de l'écart-type  $\sigma$  entraînera une compression ou une dilatation de la courbe :
  - La courbe sera plus étalée si  $\sigma$  est plus grand ;
  - La courbe sera plus étroite et élancée si  $\sigma$  est plus petit.

Si une variable aléatoire suit une loi normale de paramètre  $\mu$  et  $\sigma$ , la réalisation d'un nouvel événement a alors une forte chance d'être l'évènement qui correspond à la moyenne. À partir de la courbe, on sait que :

- $P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) \simeq 0.6827$  : environ 68% des fluctuations sont des petits mouvements ne dépassant pas 1 écart-type de la moyenne ;
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \simeq 0.9545$  : environ 95% des observations se situent entre deux écarts-types autour de la moyenne ;
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \simeq 0.9973$  : entre 99 et 100% des observations se situent entre 3 écarts-types de la moyenne (Tits, 2020).

#### 2.2.2.4 Loi normale centrée réduite ou loi normale standard

En pratique, la loi normale quelconque n'est pas utilisée. Ceci s'explique par le fait que les valeurs que prennent les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  varient entre les expériences. On utilise alors plutôt la loi normale centrée et réduite, que l'on obtient en effectuant une simple

manipulation algébrique qui ramène toute variable aléatoire normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$  à une variable aléatoire centrée en 0 et d'écart-type/variance égaux à 1.

Loi normale centrée réduite.

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit la loi normale centrée réduite sur  $\mathbb{R}$  (notée  $N(0 ; 1)$ ) si sa densité de probabilité  $f$  est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Source: (Tits, 2020)

En dehors des propriétés de la loi normale quelconque, la loi normale centrée réduite possède également les propriétés suivantes :

- $E[X] = \mu = 0$
- $\sigma[X] = \sigma = 1$
- et donc  $V[X] = (\sigma[X])^2 = 1$

Cette distribution montre également une skewness de zéro, un kurtosis de 3 et est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Pour rappel, le kurtosis est une mesure statistique permettant de mesurer le coefficient d'aplatissement d'une distribution de variables aléatoires et donc la taille des queues de distribution. Une distribution avec un kurtosis élevé aura des queues de distribution plus denses et inversement. La skewness est également une mesure statistique et permet de mesurer la symétrie ou l'asymétrie d'une distribution. Si la courbe penche vers la droite ou la gauche, la skewness sera différente de zéro.

L'utilisation de cette distribution permet de déterminer des probabilités que certaines conditions se réalisent, malgré le fait que l'on travaille toujours avec des variables aléatoires continues.

Par exemple, en supposant une variable aléatoire normale  $X \sim N(0 ; 1)$ , on peut alors trouver la probabilité que  $X \leq a$  ou  $X \geq a$  pour toute valeur de  $a$  en utilisant des tables de probabilités de la loi normale centrée réduite qui fournissent des valeurs distinctes de probabilités pour différents événements. C'est donc cette distribution que Markowitz, en se basant sur les travaux de Bachelier, choisit afin d'expliquer les variations de rendement des actifs financiers.

### 2.2.3 Modèle mathématique

Comme expliqué précédemment, le modèle de Markowitz repose sur deux éléments ; la moyenne et la variance. À travers cette dualité moyenne-variance, Markowitz détermine le risque minimal auquel un investisseur s'exposerait à un certain niveau de rendement donné, ou le rendement maximal atteignable étant donné un certain niveau de risque.

Pour ce faire, il applique un Lagrangien (il cherche les points stationnaires, maximum et/ou minimum d'une fonction dérivable à une ou plusieurs variables) à un problème d'optimisation qui aura comme fonction objectif la minimisation de la variance ou la maximisation de la rentabilité. Analysons maintenant les différents concepts mathématiques du modèle.

### 2.2.3.1 Rentabilité

#### a) Rentabilité d'un actif

Brièvement introduite dans le point précédent, la rentabilité mesure la performance des actifs financiers en mesurant l'écart entre leur valeur en t (+ le dividende distribué en t s'il y en a un) et leur valeur en t-1.

La formule la plus commune est très instinctive et relativement simple, il s'agit du Holding Period Yield (HPY) ou Holding Period Return (HPH) (Albouy et Charreaux, 2017) :

$$Rentabilité(a) = \frac{Cours(a)_t - Cours(a)_{t-1} + rev(a)_{t-1}}{Cours(a)_{t-1}}$$

Où  $a = l'actif i$  ;

*Rev = toute rentrée autre que la différence de cours (dividende...).*

Une autre méthode, moins utilisée mais également intéressante, est l'approche logarithmique :

$$Logarithmic Yield: LY = \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right)$$

Où  $V_f = \text{valeur finale}$  et  $V_i = \text{valeur initiale}$ .

Cette approche est particulièrement intéressante puisqu'elle permet de réduire les fluctuations en mettant les différentes variations de cours à la même échelle ce qui rend leur comparaison plus aisée. Je l'utiliserai donc dans la partie empirique de mon mémoire.

#### b) Espérance

« La rentabilité attendue du portefeuille est la moyenne des rentabilités attendues des actions individuelles incluses dans le portefeuille pondérées par le poids relatif (en valeurs) de chacune desdites actions. » (Albouy et Charreaux, 2017, p. 63)

Le bénéfice escompté dépend donc du prix de l'action d'aujourd'hui, et du prix de l'action au jour de la revente. Ce second prix doit cependant être estimé, et la meilleure estimation possible est, selon Markowitz, la moyenne des prix passés. Il explique cela en montrant que le prix des actifs varie toujours autour de leur moyenne, il cherche ici tout simplement à estimer la valeur future en utilisant la valeur la plus probable.

Afin de calculer la rentabilité attendue du portefeuille, également appelée espérance de gain (calculée à travers de la moyenne dans le cadre d'une loi normale), il est donc nécessaire de calculer le rendement attendu de chaque actif le composant à l'aide des



données historiques des actifs en question. Une fois les rentabilités attendues des actifs individuels obtenues, l'espérance de gain du portefeuille se calcule comme une somme pondérée des espérances de rendement des actifs individuels :

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i$$

Avec :

∇  $\mu_p$  = Espérance de rendement du portefeuille  $p$  ;

∇  $\mu_i$  = Espérance de rendement de l'actif  $i$  ;

∇  $w_i$  = Poids de l'actif  $i$  dans le portefeuille  $p$ .

### 2.2.3.2 Risque

Le deuxième élément majeur de la théorie du portefeuille selon Markowitz (1952) est le risque. Comme énoncé dans les hypothèses, l'investisseur est supposé rationnel et va donc chercher à minimiser ce risque. Pour ce faire, il va diversifier son portefeuille. Cette diversification occupe une place prépondérante dans la théorie de Harry Markowitz et prend une approche fort novatrice.

Tout d'abord, il suppose que le risque d'un portefeuille peut être calculé en fonction de sa volatilité, mesurée par la variance et l'écart-type des rentabilités. D'autres mesures seront ensuite créées et intégrées à la théorie moderne du portefeuille, comme la volatilité EWMA (exponentially weighted moving average) ou encore la volatilité du modèle de GARCH, souvent utilisée dans l'étude de données financières. Bien entendu, le risque qui intéresse les investisseurs est le risque *ex ante*, c'est-à-dire le risque qu'ils s'approprient à prendre en investissant dans un portefeuille ou un actif. La variance ne peut cependant être mesurée que sur des fluctuations du taux de rendement passées, ou *ex post*. Il utilise donc des données historiques afin d'estimer le risque d'un actif. Sa réflexion ne s'arrête cependant pas là. Selon Markowitz (1952), il ne faut pas analyser uniquement le risque intrinsèque de chaque actif, mais également la covariance de cet actif avec le reste du portefeuille.

Cette covariance mesure la similitude des variations de deux variables aléatoires (ici, les rentabilités) par rapport à leur moyenne respective. Elle mesure la relation entre ces deux variables mais également l'intensité de cette relation. De manière générale, deux actions d'un même secteur auront une covariation assez forte, alors qu'elle sera faible pour des actions extrêmement différentes, voire négative dans certains rares cas de figure. Il va donc chercher à rassembler des actifs aux rendements pas ou peu corrélés afin de diminuer le risque du portefeuille, mesuré ici par la variance, tout en essayant de garder le même rendement. Markowitz va donc analyser les actifs pas seulement individuellement, mais également comme un ensemble à travers leurs variances et covariances respectives.

La variance d'un portefeuille peut être mesurée à l'aide de cette formule (Rubinstein, 2002) :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq k}^n w_i w_k \sigma_{ik}$$

Avec :

- ∇  $w_i$  = poids de l'actif  $i$  dans le portefeuille  $p$  ;
- ∇  $\sigma_i$  = écart-type de l'actif  $i$  ;
- ∇  $\sigma_{ik}$  = covariance entre les actifs  $i$  et  $k$ .

La covariance entre deux actifs, ou un actif et un portefeuille, peut être mesurée à l'aide de cette formule (« Variance et covariance en finance », s. d.) :

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

Avec :

- ∇  $X_i$  = Cours de l'actif  $X$  à l'instant  $i$  ;
- ∇  $\bar{X}$  = Moyenne du cours de l'actif  $X$  ;
- ∇  $Y_i$  = Cours de l'actif  $Y$  à l'instant  $i$  ;
- ∇  $\bar{Y}$  = Moyenne de cours de l'actif  $Y$ .

La covariance est une forme bilinéaire symétrique définie positive, elle suit donc les propriétés suivantes :

- $\text{Cov}(x, y + z) = \text{Cov}(x, y) + \text{Cov}(x, z)$
- $\text{Cov}(x, \lambda y) = \lambda \text{Cov}(x, y)$
- $\text{Cov}(x, y) = \text{Cov}(y, x)$
- $\text{Cov}(x, x) \geq 0$

#### a) Risque spécifique

Le risque associé à un actif est composé de deux éléments. Le premier est le risque spécifique, qui représente le risque inhérent à chaque actif. Ce risque peut être réduit en diversifiant le portefeuille, donc augmentant le nombre d'actifs le constituant afin de limiter la proportion de chaque actif dans ce portefeuille.

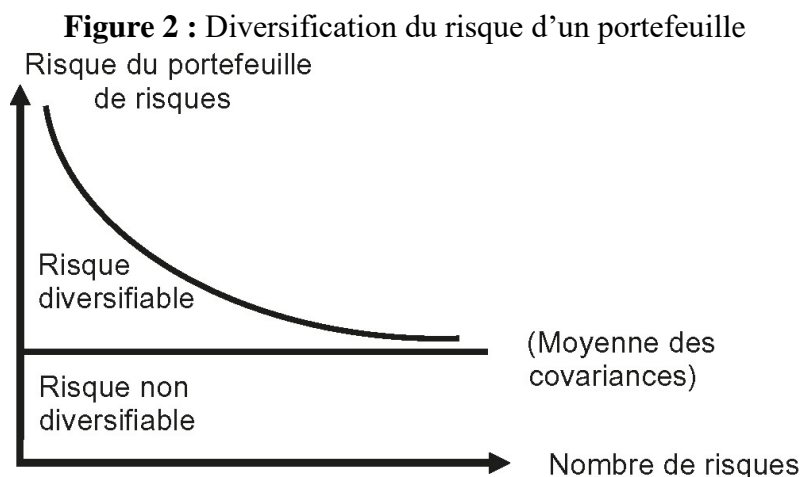
Plus le nombre d'actifs augmente, plus le risque sera amoindri. Si le nombre d'actifs tend vers l'infini, le risque spécifique du portefeuille sera proche de zéro.

Je démontrerai ce phénomène de diversification du risque spécifique dans un point ultérieur dédié à la démonstration de la loi de covariance moyenne.

#### b) Risque systématique

À l'opposé, on retrouve le risque systématique, également appelé risque de marché. Celui-ci représente le possible impact que le marché ou l'économie dans sa globalité peut avoir sur l'ensemble des actifs financiers. Par définition, ce risque n'est pas diversifiable puisqu'il affectera tous les actifs sans exception.

Afin d'avoir une idée plus claire de l'impact de la diversification sur le risque d'un portefeuille, voici un graphique le représentant :



Source : Trainar, P. (2019). Pourquoi le risque diversifiable est-il encore rémunéré ? *Revue d'économie financière*, N°133(1), 98. <https://doi.org/10.3917/ecofi.133.0095>

#### 2.2.4 La construction du portefeuille selon Markowitz

Un portefeuille d'actifs financiers se définit comme un ensemble d'actifs financiers choisis en fonction d'une multitude de critères, notamment :

- l'aversion au risque de l'investisseur ;
- sa fonction d'utilité ;
- son horizon d'investissement ;
- ses contraintes budgétaires ;
- son niveau de connaissance des marchés financiers ;
- etc.

Le gestionnaire de portefeuille est donc amené à anticiper les variations du marché et à créer un portefeuille en fonction de ces anticipations et des caractéristiques de l'investisseur.

Comme expliqué brièvement dans l'introduction, Markowitz considère un portefeuille d'actifs comme une combinaison de variables aléatoires. Il va ensuite mesurer le risque et la rentabilité espérée de chaque actif et former une multitude de portefeuilles optimaux, ou efficients, en fonction des actifs disponibles, de leur rapport rentabilité-risque et de leur covariance, élément encore inutilisé dans le domaine. Cette multitude de portefeuilles va former ce qu'on appelle une frontière efficiente, permettant à l'investisseur de choisir le portefeuille qui lui convient le mieux en fonction du couple risque/rendement qui lui correspond.

Tant que le gestionnaire de portefeuille a à sa disposition les rentabilités attendues, variances et covariances des différents actifs, il pourra ainsi mesurer à l'avance la

rentabilité attendue et le risque qui s'ensuit pour toute combinaison d'actifs financiers possible et imaginable (D'Hondt, 2018).

#### 2.2.4.1 Loi de la covariance moyenne

25 ans après avoir défendu sa thèse, Harry Markowitz détaille les conséquences pratiques de l'utilisation des covariances individuelles dans le processus d'allocations d'actifs dans un portefeuille. Il développe alors la « loi de la covariance moyenne », qui permet de voir à quel point la diversification minimise l'impact de la variance des titres individuels composant sur le risque du dit portefeuille, voir le rend insignifiant.

Tout d'abord, il est important de présenter la formule qui sera utilisée afin de mesurer le risque du portefeuille.

#### **Encadré 1. La mesure du risque d'un portefeuille**

Soit une combinaison – le portefeuille P – de deux variables aléatoires, l'action A et l'action B.

Les paramètres à prendre en compte sont les suivants :

- $R_a, R_b, R_p$  les rentabilités de A, de B et de P (pour simplifier l'écriture, la périodicité du calcul de la rentabilité ( $t$ ) est omise, mais on raisonne sur une série chronologique de rentabilités périodiques).
- $ER_a, ER_b, ER_p$  les espérances des rentabilités de A, de B et de P, c'est-à-dire leurs rentabilités attendues (mesurées, en pratique, par leurs moyennes arithmétiques).
- $w_a, w_b$  les poids relatifs (en valeurs) dans le portefeuille de chacun des titres A et B. avec  $w_a + w_b = 1$ , car le portefeuille est complètement « investi » en actions.
- $E$  l'espérance mathématique

Question : quelle est la formule du risque du portefeuille, c'est-à-dire quelle est la variance de P ?

Par définition :

$$Var P = E(R_p - ER_p)^2$$

(1)

∇ Les éléments constitutifs de droite sont par définition :

$$R_p = w_a R_a + w_b R_b$$

(2)

$$ER_p = w_a ER_a + w_b ER_b$$

(3)

∇ Donc la variance peut s'écrire :

$$Var P = E [(w_a R_a + w_b R_b - w_a ER_a - w_b ER_b)^2]$$

(4)

∇ Les termes concernant chacune des actions sont regroupés et les poids sont mis en facteurs :

$$Var P = E[(w_a(R_a - ER_a) - w_b(R_b - ER_b))^2]$$

(5)

∇ On élève au carré :

$$Var P = E[w_a^2 (R_a - ER_a)^2 + w_b^2 E(R_b - ER_b)^2 + 2 w_a w_b (R_a - ER_a) (R_b - ER_b)]$$

(6)

∇ On prend l'espérance mathématique de cette somme de trois éléments :

$$Var P = w_a^2 E(R_a - ER_a)^2 + w_b^2 E(R_b - ER_b)^2 + 2w_a w_b E(R_a - ER_a)(R_b - ER_b)$$

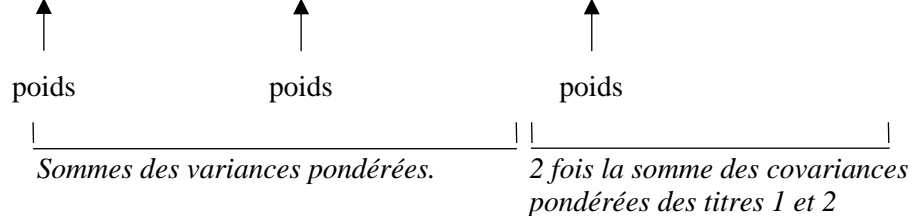
(7)

Par définition :  $E(R_a - ER_a)^2$  est la variance des rentabilités de l'action A

et  $E(R_a - ER_a)(R_b - ER_b)$  est la covariance des rentabilités des actions A et B.

→ Donc :

$$Var P = w_a^2 \text{ Variance}(R_a) + w_b^2 \text{ Variance}(R_b) + 2w_a w_b \text{ Covariance}(R_a R_b)$$



Source : (Albouy et Charreaux, 2017, pp. 64–65)

H. Markowitz (1952) va même un peu plus loin dans son raisonnement en émettant une hypothèse simplificatrice qui stipule que les actions détenues dans un portefeuille ont un poids égal. Le risque du portefeuille est alors déterminé par :

$$\frac{\text{variance moyenne des titres détenus}}{\text{nombre de titres } (N)} + \left[ \text{covariance moyenne des titres détenus} * \frac{(N-1)}{N} \right]$$

A priori, le risque du portefeuille dépendrait donc du risque moyen des titres le composant et de la relation entre les variations individuelles des titres, mesurée par la moyenne de leurs covariances.

Cependant, en analysant ses composantes un petit peu plus en profondeur, on voit à travers cette formule tout l'intérêt de la diversification de portefeuille. En effet, dès que le nombre de titres détenus (N) augmente, la variance moyenne des titres détenus tend vers zéro et son impact sur le risque du portefeuille diminue jusqu'à devenir insignifiant. Il ne reste alors que le risque créé par la covariance moyenne, comme démontré ci-dessous dans l'encadré 2.

Cette loi de la covariance moyenne stipule donc que « Le risque d'un portefeuille bien diversifié tend vers la moyenne des covariances des titres inclus dans le portefeuille »

(Albouy et Charreaux, 2017, p. 66). Étonnamment, ce phénomène de convergence du risque du portefeuille vers la covariance moyenne des titres n'est pas difficile à atteindre, puisqu'on l'observe déjà lorsqu'un portefeuille atteint un peu plus de 20 titres.

Démontrons maintenant la loi de covariance moyenne selon H. Markowitz.

### **Encadré 2. Démonstration de la loi de covariance moyenne.**

Dans l'encadré 1, il a été démontré que :

$$Var P = \sum_i w_i^2 Var_i + 2 \sum_{i \neq j} w_i w_j Cov_{ij}$$

- avec  $w_i$  le poids du titre  $i$  ;
- $Var_i$  la variance du titre  $i$  ;
- $Cov_{ij}$  la covariance des titres  $i$  et  $j$ .

Il faut souligner qu'un portefeuille de  $N$  titres se compose de  $[(N^2 - N) / 2]$  covariances individuelles, car il faut « retirer » des  $N^2$  couples de titres les  $N$  covariances *de chaque titre avec lui-même*, c'est-à-dire les  $N$  variances individuelles. Il faut aussi diviser par 2 parce que chaque covariance individuelle intervient deux fois.

Selon l'hypothèse simplificatrice posée par Markowitz, chaque action a le même poids soit :

$$w_i = w_j = \frac{1}{N}$$

Par définition :

$$Var(P) = \sum \frac{1}{N^2} Var_i + 2 \sum \frac{1}{N^2} Cov_{ij} \quad (1)$$

Les éléments constants sont mis en facteurs :

$$Var(P) = \frac{1}{N^2} \sum Var_i + \frac{2 \sum Cov_{ij}}{N^2} \quad (2)$$

Détaillons chacun des termes de droite

$$a) \quad \frac{1}{N^2} \sum Var_i = \frac{1}{N} \frac{\sum Var_i}{N} = \frac{1}{N} \text{ Variance moyenne} \quad (3)$$

$$b) \quad \sum Cov_{ij} = Cov \text{ Moyenne } \frac{N^2 - N}{2} \text{ par définition de la moyenne} \quad (4)$$

Le numérateur s'écrit en conséquence :

$$2\sum Cov_{ij} = 2 \frac{CovM (N^2 - N)}{2}$$

(5)

$$= CovM(N^2 - N)$$

(6)

$$= CovM[(N-1)N]$$

(7)

$$\text{et } \frac{2\sum Cov_{ij}}{N^2} = \frac{CovM[(N-1)N]}{N^2}$$

(8)

$$= \frac{CovM(N-1)}{N}$$

(9)

De par (3) et (9), il vient :

$$\text{Var P} = \frac{1}{N} \text{Variance Moyenne} + \frac{N-1}{N} \text{Covariance} \quad (10)$$

Si  $N \rightarrow \infty$ , alors  $\frac{1}{N} \text{Variance moyenne} \rightarrow \text{Zéro}$

Et  $\frac{N-1}{N} \rightarrow 1$

En conclusion, si le N le nombre de titres tend vers l'infini, la variance du portefeuille tend vers la covariance moyenne :

$$\text{Var P} = \text{Covariance moyenne} \quad (11)$$

Source : (Albouy et Charreaux, 2017, pp. 66-68)

Cette démonstration, bien que simple et intuitive, montre l'invalidité d'une technique d'allocation utilisée par bon nombre de gestionnaires de portefeuilles, l'allocation selon le critère « de l'antiquaire – décorateur ».

Ce phénomène, qui tient son nom d'une expression du professeur Richard Brealey de la London Business School, montre la stratégie entreprise par certains gérants de portefeuilles qui investissent la totalité d'un portefeuille dans une seule catégorie d'actifs correspondant au degré de risque que le client est prêt à assumer. Par exemple, le portefeuille d'un jeune cadre dynamique sera entièrement composé de titres de croissances, plus spéculatifs, alors qu'un investisseur typé « veuve de Carpentras » (nom donné en France aux actionnaires aisés mais peu compétents) n'aura que des titres moins risqués, considérés comme des titres de « père de famille ». L'origine de cette expression vient de la tendance qu'ont les antiquaires – décorateurs à décorer une pièce entièrement dans un style ou dans un autre selon le désir du client. Dans le cas du gestionnaire de portefeuille, celui-ci ne tient alors compte que des variances individuelles et non des covariances. Le résultat d'une telle allocation peut être

catastrophique puisque, en fonction des covariances, le risque du portefeuille de la « veuve de Carpentras » peut finalement être plus élevé que celui du « jeune cadre dynamique » (Albouy et Charreaux, 2017).

#### 2.2.4.2 Création de la frontière d'efficience

Une fois les estimations de rentabilité et de risque réalisées à l'aide des variances et covariances, Markowitz va essayer de trouver le portefeuille optimal, ou selon ses mots, le **portefeuille efficient**.

Afin de trouver ce fameux portefeuille efficient, H. Markowitz utilise une fonction d'optimisation sous contrainte afin de minimiser la variance pour une rentabilité donnée. Je ne m'attarderai pas trop sur les détails techniques dans le cadre de ce mémoire, mais je tiens quand même à présenter les bases du modèle. Voici donc une présentation des étapes de ce processus d'optimisation :

#### **Encadré 3. Quelques remarques techniques sur le calcul des portefeuilles efficients**

1 – Le problème technique est de trouver le portefeuille dont la variance est minimale sous au moins deux contraintes :

- Obtenir un certain niveau de rentabilité :  $ER^*$  ;
- Un portefeuille totalement investi en titres, autrement dit la somme des poids des titres doit être égale à un :  $\sum w_i = 1$ .

On peut rajouter autant de contraintes que nécessaire en fonction de la réglementation concernant la diversification du portefeuille, la possibilité ou non d'effectuer des ventes à découvert ( $w_i < 0$ )...

2 – Les calculs sont les suivants si on écrit les données sous forme de matrice, soit :

- C la matrice des variances covariances ;
- $C^{-1}$  l'inverse de la matrice des variances covariances ;
- W le vecteur (colonne) des poids ( $w_i$ ) : ce sont les inconnues à déterminer ;
- K le vecteur (colonne) du résultat des contraintes ;
- I la matrice unitaire.

Les étapes de calcul sont les suivantes :

$$CW = K$$

$$C^{-1} CW = C^{-1} K$$

$$I W = C^{-1} K$$



$$W = C^{-1} K$$

3 – Le résultat se présente sous la forme de n équations donnant les poids  $w_i$  de chaque titre en fonction de l'espérance de rentabilité ( $ER^*$ ) du portefeuille. Ces équations sont de la forme :

$$w_i = c_i + d_i ER^*$$

avec  $c_i$  et  $d_i$  des constantes pour chaque titre  $i$

Soit :

$$w_1 = c_1 + d_1 ER^*$$

$$w_2 = c_2 + d_2 ER^*$$

...

$$w_n = c_n + d_n ER^*$$

4 – Pour obtenir la série des portefeuilles efficients et la frontière efficiente, il suffit de faire varier  $ER^*$  la rentabilité attendue, en partant du portefeuille le plus rentable et le plus risqué (PMax sur la figure 3) et puis en considérant les portefeuilles par ordre de rentabilité décroissante jusqu'au moment où on trouve le portefeuille le moins risqué et le moins rentable (PMin de la figure 3).

Source : (Albouy et Charreaux, 2017, pp. 69-70)

La réalisation de la matrice variance-covariance est cependant très longue, et la dimension de cette matrice augmente de manière exponentielle en fonction du nombre d'actions prises en compte. Effectivement, cette matrice est composée d'une fois le nombre de variances (sur la diagonale) et de deux fois le nombre de covariances (de part et d'autre de la diagonale) comme vous pouvez le voir ci-dessous.

**Tableau 1 : matrice variances-covariances**

Tableau variances-covariances pour un portefeuille de n titres

	Titre 1	Titre 2	Titre 3	...	Titre n
Titre 1	$X_1^2 \sigma_1^2$	$X_1 Y_2 C_{1,2}$	$X_1 Y_3 C_{1,3}$	...	$X_1 Y_n C_{1,n}$
Titre 2	$X_2 Y_1 C_{2,1}$	$X_2^2 \sigma_2^2$	$X_2 Y_3 C_{2,3}$	...	$X_2 Y_n C_{2,n}$
Titre 3	$X_3 Y_1 C_{3,1}$	$X_3 Y_2 C_{3,2}$	$X_3^2 \sigma_3^2$	...	$X_3 Y_n C_{3,n}$
...	...	...	...	...	...
Titre n	$X_n Y_1 C_{n,1}$	$X_n Y_2 C_{n,2}$	$X_n Y_3 C_{n,3}$	...	$X_n^2 \sigma_n^2$

Source : *Maîtrise du risque : la variance attendue. (s. d.). Consulté le 3 mai 2020, à l'adresse <http://www.gespriv.com/la-variance-attendue.html>*

À titre d'exemple, voici la différence du nombre de chiffres pris en compte entre une étude sur un portefeuille 5, 10 et 100 actions :

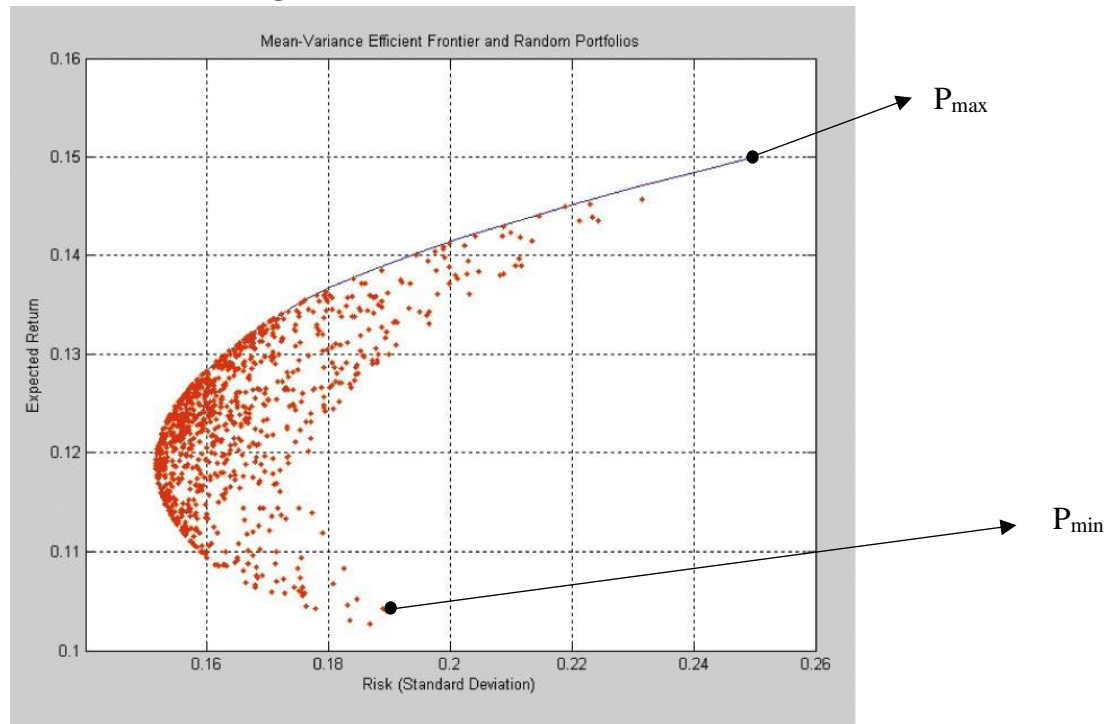
- 5 actions = 25 chiffres (5 variances et 2 fois 10 covariances)
- 10 actions = 100 chiffres (10 variances et 2 fois 45 covariances)

- 100 actions = 10 000 chiffres (100 variances et 2 fois 4950 covariances)

C'est donc un processus extrêmement long et fastidieux qui sera difficilement réalisable pour un portefeuille composé d'un grand nombre d'actions. La meilleure façon de présenter cette méthode semble donc être à travers un graphique.

Pour ce faire, Markowitz va représenter l'ensemble des portefeuilles possibles dans un espace bidimensionnel avec le rendement en ordonnée et le risque en abscisse. Dans cet espace, il va ensuite créer la frontière efficiente, qui représente l'ensemble des portefeuilles qui minimisent le risque à un rendement donné, ou qui a contrario, maximise le rendement pour un risque donné (les portefeuilles « efficaces »).

**Figure 3 : frontière efficiente**



Source : La théorie moderne du portefeuille. (s. d.). Consulté le 4 mai 2020, à l'adresse [https://www.abcbourse.com/apprendre/19\\_theorie\\_moderne\\_du\\_portefeuille.html](https://www.abcbourse.com/apprendre/19_theorie_moderne_du_portefeuille.html)

La frontière est donc l'extrémité gauche de la courbe représentée dans la figure 3, et tous les titres se trouvant à gauche de cette courbe sont sous-optimaux/inefficients puisqu'il existe un portefeuille qui offre un rendement supérieur pour le même niveau de risque.

La partie réellement révolutionnaire de ce processus de diversification par la covariance réside dans le fait que tous les portefeuilles optimaux qui constituent cette frontière efficiente offrent une rentabilité espérée plus élevée que les actions les composant tout en gardant un niveau de risque équivalent (D'Hondt, 2018).

### 2.2.5 Conclusion du modèle de Markowitz

En conclusion, Harry Markowitz révolutionne le monde financier en introduisant les notions de covariance et de diversification dans le processus de construction de portefeuilles.

Il pose ainsi les bases de ce qui deviendra la théorie moderne du portefeuille.

Ce qui à l'époque ne pouvait même pas être considéré comme une thèse d'économie selon un des deux suffragants de la thèse de Markowitz ; Milton Friedman, est pourtant devenu un des articles fondateurs de ce qui deviendra le paradigme dominant de la finance néoclassique, encore utilisé des décennies après sa création et enseigné dans toutes les écoles de commerces et faculté des sciences économiques et de gestion.

## 2.3 Modèles complémentaires et applications de la MPT

Bien qu'il en ait posé les bases, le modèle classique de la finance ne se limite pas à Harry Markowitz. Effectivement, de nombreux autres auteurs ont contribué à donner ses fondations à la théorie financière néoclassique que nous connaissons aujourd'hui. Jovanovic (2002) montre que déjà en 1863, Jules Regnault, à travers ses travaux, tente de démontrer que les cours boursiers suivent une marche aléatoire. Cet auteur va inspirer Bachelier (1900), considéré comme un des pères de la finance moderne qui est le premier à montrer que les changements de prix suivent une trajectoire aléatoire discrète ou un mouvement brownien qui prend une forme de cloche. Au fil du temps, cette courbe en cloche devient tellement *terra cognita* pour les mathématiciens qu'elle en vient à être appelée la loi normale. Bachelier inspirera à son tour de nombreux auteurs, tels que Samuelson, Merton, Black et Scholes...

En bref, le modèle financier néoclassique est le résultat d'une quantité innombrable d'études réalisées par une multitude d'auteurs de périodes et de contrées différentes. Le but de mon mémoire n'étant pas de retracer l'histoire complète de cette théorie, j'ai décidé de me limiter à quelques auteurs dont les apports furent complémentaires et cruciaux à la création de la théorie moderne du portefeuille actuelle et dont les modèles, ou du moins les complémentarités au modèle de Markowitz qu'ils apportent se basent sur **la même hypothèse de normalité des rendements boursiers**.

### 2.3.1 Sharpe : combien vaut un actif ?

William F. Sharpe est sans aucun doute un des auteurs fondateurs ayant le plus impacté la théorie financière actuelle. Bien qu'ils en dépassent le cadre, ses travaux ont contribué à faciliter la méthode proposée par Markowitz. Tout comme ce dernier, Sharpe suit le postulat que les investisseurs sont rationnels et maîtres de leur destin et de leur choix.

À travers lesdits travaux, on peut discerner trois axes thématiques principaux, ayant chacun permis trois apports majeurs :

- Axe 1 : La méthode d'analyse de portefeuille où il apporte sa contribution par la détermination d'un équilibre général et la création du modèle d'équilibre des actifs financiers ;
- Axe 2 : l'analyse de la performance des portefeuilles à travers un ratio appelé ratio de Sharpe à travers lequel il mesure la différence de rendement espéré par unité de risque associée au différentiel de rendement ;
- Axe 3 : l'allocation des fonds d'investissement. Il y crée un modèle d'évaluation des classes d'actifs qui lui servira de base afin de déterminer une méthodologie d'appréciation des performances des gérants de fonds.

Le troisième axe étant dédié à une thématique quelque peu éloignée de la nôtre, je ne l'aborderai pas dans le cadre de ce mémoire, je me concentrerai donc sur les deux autres, et en particulier le premier, celui-ci étant complémentaire aux travaux de Markowitz.

#### 2.3.1.1 L'analyse de portefeuille

Rappelons-le, Harry Markowitz propose un processus de création de portefeuille en trois temps :

- Estimation des probabilités des rendements futurs des titres individuels ;
- Analyse de ces estimations afin de créer un ensemble de portefeuilles efficients ;
- Choix dans cet ensemble d'un ou de plusieurs portefeuilles correspondant le mieux aux préférences des investisseurs.

William Sharpe (1964), à travers ses travaux sur l'analyse de portefeuille, tente d'améliorer la deuxième étape du processus de sélection de portefeuilles de Markowitz : la création des portefeuilles efficients, en allégeant la procédure de détermination de la frontière efficiente.

En effet, comme vu dans le point 2.2.4.2, l'ampleur de la matrice de variance covariance qui doit être créée dans le processus de création des portefeuilles efficients de Markowitz requiert un temps de calcul beaucoup trop important, ce qui la rend quasiment inutilisable en pratique lorsqu'un grand nombre de titres doivent être pris en compte. De plus, l'utilisation du modèle de base de Markowitz requiert que l'on connaisse l'entièreté de la matrice variance covariance, le problème ne se situe donc pas uniquement dans le nombre de données à estimer, mais également dans la précision et la cohérence de ses estimations, qui en ressortaient quelque peu discutables.

Pour ce faire, Sharpe va tout d'abord travailler sur un modèle diagonal, pour ensuite approfondir ses recherches afin d'aboutir au MEDAF (modèle d'évaluation des actifs financiers, ou CAPM en anglais : Capital Asset Pricing Model), qui comme son nom

l'indique, est une méthode d'évaluation des actifs financiers encore utilisée et enseignée de nos jours.

### 2.3.1.2 Modèle diagonal

Le modèle diagonal va poser les bases pour la création du Medaf (pour rappel : modèle d'évaluation des actifs financiers). Bien qu'il ne soit pas nécessaire de l'analyser en profondeur, il est donc quand même important d'en apprendre les bases.

Ce modèle repose sur l'hypothèse principale que la rentabilité de chaque titre est grandement déterminée par son lien avec un même facteur sous-jacent, appelé indice. Nous sommes donc ici dans ce que l'on appelle un « *modèle à un indice* » (ou « *modèle unifactoriel* », « *modèle monofactoriel* »). Les rendements des différents titres sont donc liés entre eux à travers leur relation avec ce facteur sous-jacent. Il s'en suit que cette rentabilité est fonction de facteurs aléatoires et de cet élément extérieur seul. Sharpe décrit donc la rentabilité comme :

$$R_i = A_i + B_i I + C_i$$

Où  $A_i$  et  $B_i$  sont les paramètres,  $C_i$  est une variable aléatoire de variance  $Q_i$  et d'espérance nulle &  $I$  est le niveau de l'indice choisi (celui-ci peut être le PIB, un indice de prix particulier, ou autre facteur pouvant influencer la rentabilité des titres).

$I$  peut être en partie déterminé par les facteurs aléatoires :

$$I = A_{n+1} + C_{n+1}$$

Où  $A_{n+1}$  est un paramètre et  $C_{n+1}$  est une variable aléatoire d'espérance nulle et de variance  $Q_{n+1}$ .

On pose l'hypothèse que la covariance entre  $C_i$  et  $C_j$  est nulle pour toutes valeurs de  $i$  et  $j$  ( $i \neq j$ ).

Les seules valeurs nécessaires à la résolution du modèle diagonal sont alors :

- $A_i, B_i$  et  $Q_i$  pour les  $N$  titres ;
- $A_{n+1}$  et  $B_{n+1}$  pour l'indice  $I$ .

Le nombre d'estimations à réaliser est donc considérablement réduit par rapport à l'utilisation d'une matrice variance covariance. À titre d'exemple, une analyse de 100 titres ne demandera que 302 ( $3 \times 100$  pour les 100 titres + 2 pour  $I$ ) estimations. Ce chiffre reste important mais montre déjà une amélioration significative par rapport à la méthode de Markowitz.

Une fois les paramètres du modèle diagonal déterminés, les valeurs restantes nécessaires à la résolution du modèle peuvent aisément être déduites à travers les relations ci-dessous.

$$\begin{aligned} E_i &= B_i (A_{n+1}) \\ V_i &= (B_i)^2 (Q_{n+1}) + Q_i \\ C &= (B_i) (B_j) (Q_{n+1}) \end{aligned}$$

L'analyse peut ensuite être effectuée en utilisant ces valeurs induites.

Sharpe ne s'arrête cependant pas là et continue dans sa lancée en reposant le problème de l'analyse de portefeuille à partir de son modèle diagonal afin d'aboutir, en termes de paramètres fondamentaux, à ce problème de maximisation (Voir ANNEXE 1 : démonstration du modèle diagonal) :

$$\begin{aligned} & \text{Maximiser } \lambda E - V \\ & \text{Avec } E = \sum_{i=1}^{N+1} A_i \\ & \text{Et } V = \sum_{i=1}^{N+1} Q_i \\ & \text{Vérifiant } X_i \geq 0 \text{ pour tout } i \text{ de } 1 \text{ à } N \text{ et} \\ & X_i = 1 \end{aligned}$$

Où E = Espérance ;

Et V = Variance.

Ce modèle offre deux avantages par rapport à celui de Markowitz.

- Le premier réside dans sa simplicité d'utilisation. En effet, il réduit considérablement le nombre de calculs à effectuer en se limitant à ceux qui sont essentiels à l'analyse et la sélection de titres.
- Deuxièmement, il ne néglige pas l'importance des interrelations entre les titres constituant un portefeuille et prend la plupart d'entre elles en compte.

Malgré les progrès qu'il offre à la méthode d'analyse de portefeuille initiale, cette méthode diagonale a cependant encore quelques lacunes. Tout d'abord, malgré sa simplicité d'utilisation comparée aux modèles existants, une analyse sur un nombre important de titres aura tout de même encore un temps de calcul élevé et donc un coût non négligeable. De plus, la simplicité qu'elle offre vient à un prix, il se peut effectivement que la valeur de l'analyse en soit diminuée, l'analyste étant quelque peu restreint dans ses prévisions.

Sharpe va donc continuer à approfondir ses travaux afin de remédier à ces lacunes, jusqu'à élaborer un modèle d'équilibre des actifs financiers : le MEDAF (Albouy et Charreaux, 2017).

### 2.3.1.3 Le MEDAF

La prime de risque est introduite pour la première fois dans les années soixante par Jack Treynor (1961) qui constate que tout investisseur, pour investir dans un actif plus risqué, demande une rentabilité plus élevée. Cette prime de risque montre donc cette différence de rentabilité espérée entre un investissement dans un actif risqué et un investissement dans un actif sans risque et est fonction de la covariance d'un actif avec la valeur de tous les investissements constituant le marché.

À la même époque, mais à un endroit différent, Sharpe continue ses travaux sur son modèle d'équilibre des actifs financiers et tente de découvrir l'impact du risque sur l'évaluation des actifs financiers. Selon lui, les modèles existants ont une lacune non

négligeable, en effet, il manque « une théorie qui puisse donner une signification réelle à la relation entre le prix d'un actif individuel et son risque... Malheureusement très peu de choses ont été dites sur la composante particulière du risque qui importe vraiment » (cité par Albouy et Charreaux, 2017, p.85). Pour ce faire, Sharpe part des propositions émises par le modèle unifactoriel expliqué dans le point précédent :

- Les rentabilités des titres sont liées les unes aux autres à travers leur relation avec un même facteur sous-jacent de base.

Mais également sur les propositions faites par l'approche de Markowitz :

- La diversification permet de diluer le risque des actifs individuels dans un portefeuille. Le seul facteur à considérer est donc l'apport de chaque titre au risque total du portefeuille.

Le MEDAF, qui tente de découvrir le prix des actifs à l'équilibre du marché, se repose sur trois axes principaux :

- a) La droite de marché (plus communément appelée Capital Market Line, CML) ;
- b) La création d'une relation qui rend possible l'évaluation du prix d'équilibre d'un actif financier : la droite de marché des titres (plus communément appelée Security Market Line, SML)
- c) L'établissement de la relation entre le rendement d'un actif et celui du marché dans son ensemble : le bêta.

Sous sa forme standard, ce modèle se base sur une multitude d'hypothèses (certaines proviennent du modèle de Markowitz) que voici :

**Les agents intervenants sur le marché doivent :**

- Chercher à maximiser leur utilité ;
- Avoir des attentes homogènes ;
- Avoir un horizon d'investissement précis et commun ;
- Évaluer les caractéristiques d'un investissement en fonction de sa moyenne et de sa variance selon le modèle de Markowitz ;
- Être averses au risque.

**Le marché doit être parfait :**

- L'information est gratuite et facilement accessible pour tous les acteurs ;
- Il n'existe pas de coûts de transactions, c'est-à-dire ni marge entre prix d'achats et de vente, ni taxes commissions ou autre frais sur les transactions ;
- Les rendements boursiers suivent une distribution normale ;
- Les investisseurs peuvent prêter et emprunter autant d'argent qu'ils le souhaitent au taux sans risque  $R_0$  afin d'acheter des actifs à découvert (Jokung Nguéna, 2004).

Bien que certaines de ces hypothèses peuvent paraître fort éloignées de la réalité (on ne peut par exemple pas emprunter et prêter à un même taux), elles sont cependant

nécessaires à la création de ce modèle qui, comme tout autre modèle, ne peut qu'être restrictif.

a) Construction de la Capital Market Line.

Sharpe part d'un point démontré lors de la construction de son modèle diagonal : tout investisseur rationnel choisira un portefeuille se situant sur une droite qui démarre au point de risque nul où tout le portefeuille est investi dans l'actif sans risque (offrant ainsi une rentabilité  $R_f$ , le taux sans risque) et qui passe par le point de tangence avec la frontière efficiente (qui correspond à M : le portefeuille tangent). Tous les portefeuilles s'y trouvant forment donc une combinaison optimale de l'actif sans risque et du portefeuille tangent, ils offrent ainsi une rentabilité supérieure au taux sans risque, rentabilité qui augmente au fur et à mesure que le portefeuille devient risqué. Le rendement de ces portefeuilles est parfaitement corrélé avec le portefeuille tangent puisqu'ils sont une combinaison linéaire du dit portefeuille et de l'actif sans risque. De plus, cela permet aussi de considérer que le portefeuille tangent correspond au portefeuille de marché, puisque tous les actifs se trouvant sur le marché sont détenus par au moins un intervenant. Pour rappel, le portefeuille de marché est « le portefeuille composé de tous les actifs présents sur le marché. Chaque actif étant pris dans sa proportion au sein du marché. » (Jokung Nguéna, 2004, pp.325-364).

Le fait d'être composé de tous les actifs risqués du marché permet au portefeuille de marché d'être totalement diversifié, il contiendra donc uniquement le risque systématique.

À l'optimum, tout portefeuille sera composé de l'actif sans risque et du portefeuille de marché.

Sharpe a divisé la rentabilité des actifs en deux composantes :

- La composante de temps, représentée par le taux sans risque ;
- La composante de risque, qui est la rentabilité supplémentaire attendue par l'investisseur en contrepartie du risque auquel il se soumet en investissant dans certains actifs. Ce « prix » du risque correspond à la pente de la droite de marché.

Cette dernière est déterminée par les points R, qui est l'ordonnée à l'origine de  $R_f$ , et M, de coordonnées  $(\sigma_M, E_M)$  et a pour équation (Albouy et Charreaux, 2017) :

$$E_p = R_f + \frac{E_M - R_f}{\sigma_M} \sigma_p$$

Où :

$E_p = E(R_p)$  Espérance de rentabilité du portefeuille P ;

$E_m = E(R_m)$  Espérance de rentabilité du portefeuille de marché ;

$\sigma_p$  = mesure de risque du portefeuille P ;

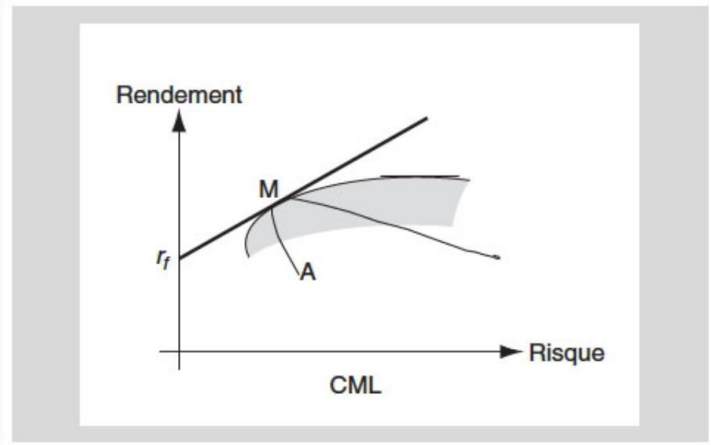
$\sigma_M$  = mesure de risque du portefeuille de marché ;



$E_m - R_f$  est appelée « *prime de risque du marché* » ;  
 $\frac{E_m - R_f}{\sigma_m}$  est la pente de la droite de marché.

Et comme représentation graphique :

**Figure 4 : droite de marché des capitaux**



Source : Jokung Nguéna, O. (2004). Chapitre 7 : Le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF).  
 Le modèle de marché. L'efficacité des marchés. Dans : *Mathématiques et gestion financière* (pp. 325-364). Louvain-la-Neuve: De Boeck Supérieur

b) La création d'une relation rendant possible l'évaluation du prix d'équilibre d'un actif financier : la Security Market Line.

Maintenant la Capital Market Line tracée, la prochaine étape est de déterminer la fonction de la Security Market Line, qui est la représentation graphique du MEDAF. À travers la CML, Sharpe a montré la relation entre les portefeuilles efficients et le portefeuille de marché. Ce qui m'intéresse maintenant est de généraliser cette relation afin de pouvoir l'utiliser sur tous les actifs risqués. J'ai établi précédemment que le seul risque qui intéresse les investisseurs est le risque systématique, puisque celui-ci n'est pas diversifiable. Afin d'identifier ce risque, il faut mesurer la contribution d'un actif au risque total du marché à travers sa covariance avec le portefeuille de marché. Partons de la CML afin de tenter de créer cette relation.

La droite de marché et la courbe de la frontière efficiente étant tangentes en M, leurs pentes s'égalisent. On peut alors établir la relation (Albouy et Charreaux, 2017) :

$$\frac{(E_i - E_m)\sigma_M}{\sigma_{im} - \sigma_M^2} = \frac{E_m - R_f}{\sigma_M}$$

Où :  $\frac{E_m - R_f}{\sigma_M}$  est la pente de la droite de marché ;

et  $\frac{(E_i - E_m)\sigma_M}{\sigma_{im} - \sigma_M^2}$  est la pente de la frontière efficiente au point M.

$$E_i - E_M = \frac{(\sigma_{iM} - \sigma_M^2)(E_M - R_f)}{\sigma_M^2}$$

Qui devient :

$$E_i = R_f + (E_M - R_f) \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

$$(E_i - R_f) = (E_M - R_f) \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

Si on pose :  $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ ,

$$(E_i - R_f) = \frac{E_M - R_f}{\sigma_M} \beta_i \sigma_M$$

On obtient alors :

$$(E_i - R_f) = (E_M - R_f) \beta_i$$

$(E_i - R_f)$ , qui représente la prime de risque du titre  $i$ , est fonction de la covariance de ce titre avec le marché. À travers cette formule, on voit donc que le marché exerce une influence sur l'entière des titres qui le composent.

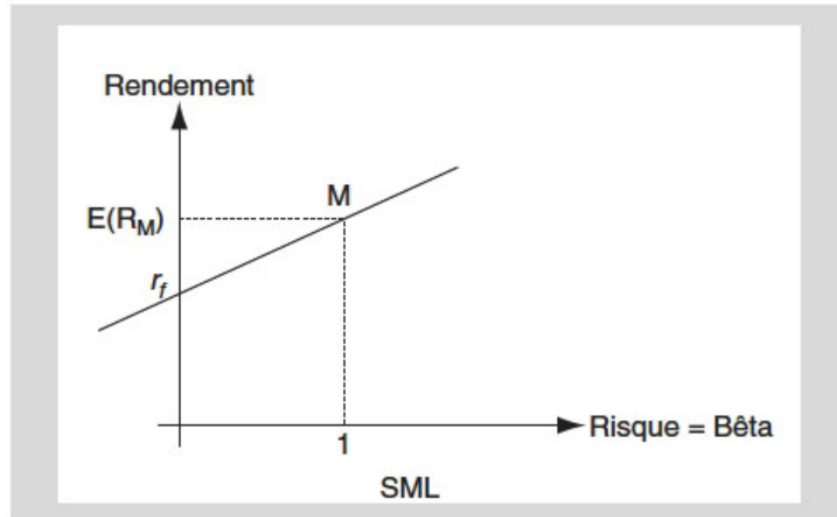
Finalement, on peut faire ressortir  $E_i$ , la rentabilité espérée du titre  $i$ , on obtient alors la formule :

$$E_i = R_f + \beta_i (E_M - R_f)$$

À l'équilibre de marché, l'espérance de rentabilité du titre  $i$  est égale au taux sans risque augmenté d'une prime de risque qu'on obtient en multipliant la contribution du titre au risque d'un marché  $\beta_i$  par la prime de risque du marché  $(E_M - R_f)$ .

On obtient finalement la droite de marché relative aux titres, ou Security Market Line, dont la représentation graphique se trouve ci-dessous :

**Figure 5 : Security Market Line**



Source : Jokung Nguéna, O. (2004). Chapitre 7 : Le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF).  
Le modèle de marché. L'efficacité des marchés. Dans : *Mathématiques et gestion financière* (pp. 325-364). Louvain-la-Neuve: De Boeck Supérieur

Cette droite de marché permet d'évaluer le rendement de n'importe quel actif ou portefeuille (efficient ou non !) à travers une fonction linéaire du risque de l'actif ou du portefeuille au risque de marché.

#### c) Nouvelle mesure de risque : le bêta

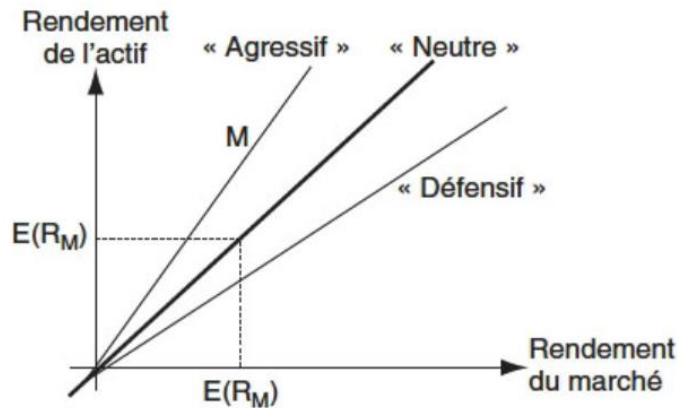
Comme on a pu le voir dans la formule de la SML ainsi que dans la figure 5 ci-dessus, le MEDAF introduit une nouvelle mesure de risque : le bêta. Cette innovation est non sans importance dans la compréhension du MEDAF, il est donc important de faire une brève parenthèse afin de l'introduire.

« On appelle bêta d'un actif, le rapport de sa covariance avec le marché par la variance du marché. Il s'agit de la contribution de l'actif au risque total du marché, notée  $\beta_i$  et égale à  $\frac{cov(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$  » (Jokung Nguéna, 2004, pp 325-364).

Le bêta est donc une mesure de risque permettant de déterminer le *risque systématique* d'un actif. Le bêta peut être interprété de la manière suivante, l'actif est considéré :

- Agressif si son bêta est supérieur à 1, il amplifiera alors les évolutions du marché, ce qui le rend plus risqué ;
- Neutre si son bêta est égal à 1, il reproduira les évolutions du marché ;
- Défensif lorsque son bêta est inférieur à 1, il est alors moins risqué que le marché.

**Figure 6 : rendement d'un actif en fonction de son bêta**



Source : Jokung Nguéna, O. (2004). Chapitre 7 : Le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF).  
Le modèle de marché. L'efficacité des marchés. Dans : *Mathématiques et gestion financière* (pp. 325-364). Louvain-la-Neuve: De Boeck Supérieur

Le bêta du portefeuille de marché sera alors égal à 1, alors que le bêta de l'actif sans risque sera nul.

L'ajout du bêta en tant qu'outil dans la gestion de portefeuille facilite énormément la mesure du risque d'un portefeuille. Effectivement, une fois le bêta des différents actifs le composant obtenus, le bêta du portefeuille n'est autre que la combinaison linéaire de ces bêtas.

Considérons un portefeuille P composé à 40% d'un actif A ayant un bêta de 0.3 et à 60% d'un actif B de bêta 0.8. Le bêta du portefeuille P sera alors :  $0.4 \times 0.3 + 0.6 \times 0.8 = 0.6$ .

On dispose donc maintenant de deux mesures de risques, le bêta et l'écart-type. L'utilisation de ces deux mesures sur un même actif/portefeuille peut cependant aboutir à des résultats différents, puisque le bêta mesure la similarité des fluctuations d'un actif par rapport au marché, alors que l'écart-type mesure l'importance des fluctuations de son cours par rapport à sa moyenne.

Bien que leurs résultats puissent différer, ils ne sont cependant en général pas fort éloignés. Un actif risqué ayant un écart-type important aura tendance à subir des fluctuations plus importantes que celles du marché et donc à avoir un bêta élevé. On remarque notamment que les deux mesures sont positivement corrélées dans la formule du bêta en la mettant sous une forme différente, que voici (Jokung Nguéna, 2004)

:

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\rho_{iM} \sigma_i \sigma_M}{\sigma_M^2} = \rho_{i,M} \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_M} \right)$$

Avec :  $\rho_{i,M}$  = corrélation entre l'actif i et le marché

$\sigma_i$  = écart type de l'actif i.

$\sigma_M$  = écart type du marché.

d) Pour aller plus loin

La détermination de la relation entre le rendement d'un actif et celui du marché peut être poussée un peu plus loin. Cette relation peut être représentée à travers ce qu'on appelle « la droite caractéristique d'un titre » déterminée par un nuage des points qui représente le rapport rendement d'un titre-rendement du marché. L'équation de cette droite est :

$$R_i = \sigma_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i$$

Où  $R_i$  est le rendement de l'actif  $i$  ;

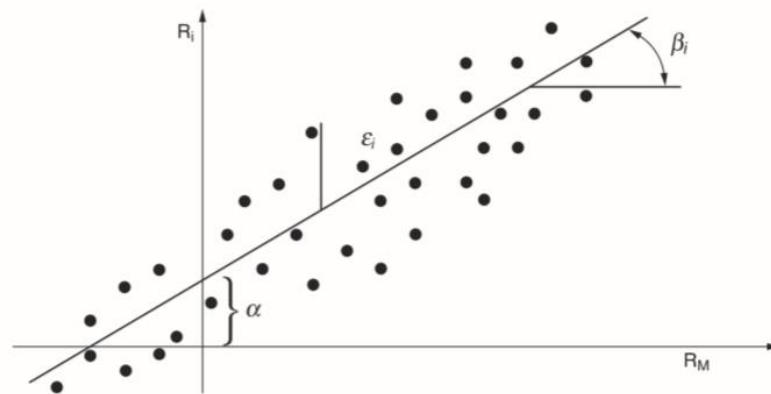
$\sigma_i$  est l'écart-type de l'actif  $i$  ;

$\beta_i$  est le bêta de l'actif  $i$  ;

$\varepsilon_i$  est une variable aléatoire d'espérance et de covariance avec le marché nulles.

Elle peut être représentée par la figure ci-dessous :

**Figure 7 : droite caractéristique d'un titre**



Source : Albouy, M., & Charreaux, G. (2017). *Les grands auteurs en finance (French Edition)* (2e éd, p. 88). Caen, France : Éditions EMS.

La présence de la variable aléatoire  $\varepsilon_i$  dans l'équation de la droite montre que les variations du rendement du marché ne sont pas les seules à causer les variations des rendements des titres. Effectivement, alors que l'influence du marché sur les titres se traduit à travers la pente de la droite, l'écart entre les différents points et la droite  $\varepsilon_i$  représente une caractéristique spécifique au titre  $i$ .

L'espérance et la variance du titre  $i$  sont données par :

$$E_i = \sigma_i + \beta_i E_M$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma^2(\varepsilon_i)$$

L'espérance et la variance du portefeuille  $p$  sont alors :

$$E_p = \sum_{i=1}^N X_i E_i$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N X_i^2 \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_i^2(\varepsilon_i)$$

L'espérance, intuitivement, est la moyenne pondérée des espérances de rendement des titres individuels qui forment le portefeuille. D'autre part, on remarque que le risque est séparé en deux composantes :

- $\sum_{i=1}^N X_i^2 \beta_i^2 \sigma_M^2$ , qui représente le risque systématique du portefeuille et qui est donc diversifiable. On y lie le bêta des titres avec la variance du portefeuille de marché ;
- $\sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_i^2(\varepsilon_i)$ , qui représente le risque spécifique au portefeuille, et qui peut être éliminé en diversifiant le portefeuille correctement (Albouy et Charreaux, 2017).

Cependant, en réalité, il serait naïf d'affirmer que le cours d'un actif n'est influencé que par deux facteurs. On peut alors supposer que les rendements des différents titres sont fonctions linéaires non seulement du marché, mais également d'une multitude d'autres facteurs, tels que les taux d'intérêt, les dividendes versés par l'entreprise ou encore la taille de cette dernière. Contrairement au postulat posé dans le MEDAF, l'utilisation d'un modèle multifactoriel à la place d'un unifactoriel serait plus adaptée afin d'expliquer le comportement du cours d'un titre. Chaque titre serait donc influencé plus ou moins fortement par ces différents facteurs. Ce modèle multifactoriel va conduire au développement de l'APT, ou Arbitrage Pricing Theory (théorie de l'évaluation par Arbitrage) par Ross en 1976 qui explique le rendement d'un titre comme une fonction linéaire de m facteurs reliés de la manière suivante :

$$\tilde{R}_i = a_i + b_{i1}\tilde{F}_1 + b_{i2}\tilde{F}_2 \dots + b_{iN}\tilde{F}_{iN} + e_i$$

Pour  $i = 1, \dots, N$

Où :

- $\tilde{R}_i$  est le taux de rendement de l'actif  $i$  ;
- $a_i$  est la valeur espérée du rendement de l'action  $i$ , quand tous les facteurs ont une valeur nulle ;
- $\tilde{F}_j$  est la valeur du  $j$  facteur qui affecte le rendement des actions ;
- $b_{ij}$  est la sensibilité du rendement de l'action  $i$  au  $j$  facteur ;
- $e_i$  est un terme aléatoire d'espérance nulle et de variance qui possède les propriétés suivantes :

$$E(e_i, e_j) = 0, \forall i \text{ et } j \text{ avec } i \neq j$$

$$\text{cov}(e_i, F_j) = 0, \forall i \text{ et } j.$$

source : (Albouy et Charreaux, 2017).

Ce modèle n'invalide cependant pas le MEDAF. En effet, en ne considérant qu'un seul facteur commun pour expliquer les mouvements de cours de tous les titres, le MEDAF est tout simplement un cas particulier de l'APT. La théorie de l'arbitrage est donc un modèle plus général, qui émet moins d'hypothèses (pas d'hypothèse de normalité des rendements, pas de postulat selon lequel les investisseurs se situent dans une perspective moyenne-variance...), mais qui en contrepartie nécessite la détermination de plus de facteurs.

En conclusion, le MEDAF émet deux conclusions :

- La première est une règle normative et donc difficilement vérifiable empiriquement : tout investisseur rationnel devrait chercher à maximiser son utilité en construisant un portefeuille composé d'actif sans risque et du portefeuille de marché.
- La deuxième est décomposée en deux parties. La première est la détermination d'une prime de risque pour tout actif risqué ; la deuxième est l'explication de l'origine de cette prime à travers la composante systématique du risque du portefeuille, en utilisant le bêta comme mesure de proportionnalité du risque du portefeuille par rapport au risque du marché.

Le MEDAF va recevoir de nombreuses critiques au fil du temps. Une des principales raisons de cette remise en cause vient des hypothèses sur lesquelles il se repose, principalement celles de rationalité des investisseurs et d'efficacité du marché. Le modèle n'en est pas moins valable. Il reste un modèle d'équilibre qui vise à associer des rendements **espérés** avec un niveau de risque attendu. Il est cependant difficile de confirmer les données obtenues, étant donné qu'on observe des rendements et des bêtas réalisés, et non des rendements espérés et des mesures ex ante des bêtas. L'idée de base du modèle est et reste donc valable (Albouy et Charreaux, 2017).

#### 2.3.1.4 L'analyse de la performance des portefeuilles : le ratio de Sharpe.

Bien que cet axe ne se situe pas autant dans la continuité du modèle de Markowitz que le MEDAF, il prend tout de même une approche moyenne-variance en utilisant les deux composantes principales du modèle de Markowitz et du MEDAF (la rentabilité et le risque) afin de mesurer la performance des portefeuilles. De plus, le ratio de Sharpe est mondialement utilisé et enseigné comme étant un pilier dans la mesure de la performance des portefeuilles, il serait donc inadapté de parler de Sharpe sans au moins introduire ce concept, c'est pourquoi j'ai jugé pertinent de l'inclure dans ce mémoire.

Bien que le ratio le plus utilisé de nos jours soit le ratio de Sharpe, c'est encore une fois Treynor qui est le premier à introduire un ratio permettant de mesurer la performance d'un portefeuille risqué A par rapport à celle d'un portefeuille sans risque F.

Ce ratio, appelé ratio de Treynor, représente la pente de la droite reliant ces deux portefeuilles et s'écrit :

$$T_p = \frac{(R_A - R_F)}{\beta_A}$$

Où  $(R_A - R_F)$  est la prime de risque et  $\beta_A$  est le bêta (et donc la mesure du **risque systématique**) du portefeuille A.

Sharpe va partir de la même idée, à une différence près. Il va lui aussi créer un ratio dont le but est de mesurer le différentiel de rendement espéré par unité de risque associé à ce rendement supplémentaire. Cependant, il n'utilisera non pas le risque systématique comme mesure de risque, mais bien le risque total (la volatilité du cours, mesurée par l'écart-type). Le fait de ne plus utiliser le bêta signifie que le ratio de Sharpe,

contrairement au ratio de Treynor, ne fait pas référence à un indice de marché, ce qui le rend plus aisé à utiliser.

Le ratio de Sharpe est donc donné par :

$$S = \frac{d}{\sigma_d}$$

Où d = Différentiel de rendement attendu ;

$\sigma_d = (\sigma_A - \sigma_F)$  = écart-type du rendement excédentaire du portefeuille.

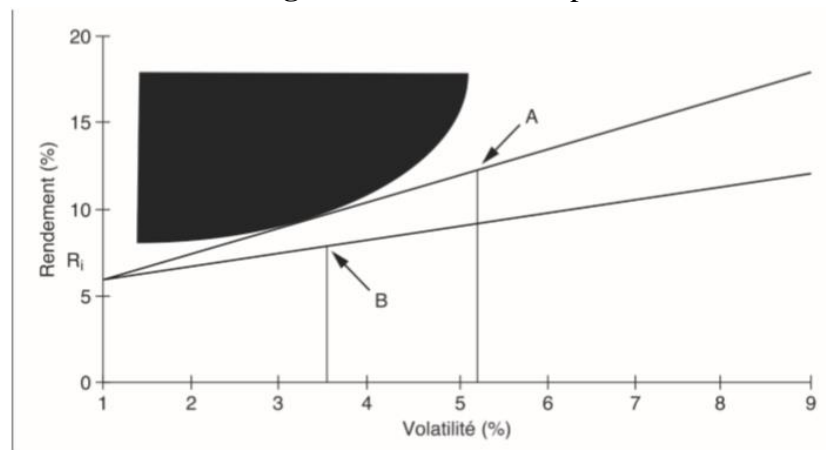
Ou, dans sa forme la plus connue :

$$S = \frac{(R_A - R_F)}{\sigma_d}$$

Remarque : le ratio présenté dans ce mémoire est le ratio *ex-ante* qui utilise les rendements espérés, il existe également un ratio *ex-post* (la version historique), moins connu, qui ne sera pas couvert dans le cadre de ce mémoire.

Graphiquement, il peut être représenté comme ceci :

**Figure 8 : Ratio de Sharpe**



Source : Albouy, M., & Charreaux, G. (2017). *Les grands auteurs en finance (French Edition)* (2e éd, p. 95). Caen, France : Éditions EMS.

Sur le graphique, on peut déduire intuitivement que le portefeuille A offre une meilleure performance que le portefeuille B, puisqu'il offre un meilleur rendement pour le même niveau de volatilité. Le ratio de Sharpe s'interprète assez facilement, que ce soit de manière graphique ou à travers son équation. Lorsqu'on compare plusieurs portefeuilles, celui qui obtient le ratio le plus élevé est le plus performant. Si un portefeuille a un ratio négatif, cela signifie qu'il offre une performance moindre par rapport au taux sans risque (Albouy et Charreaux, 2017).



### 2.3.2 Black & Scholes

#### 2.3.2.1 Introduction

Fischer Black et Myron Scholes sont également deux auteurs fondateurs du modèle classique de la finance. Leur principale contribution est l'élaboration d'une équation différentielle permettant l'évaluation d'options (plus précisément d'options call européennes, donc exerçable uniquement à l'échéance), qui sera présentée pour la première fois dans le *journal of Political Economy* en 1973. Bien que son nom ne soit pas souvent cité lorsqu'on parle de ce modèle, Robert Merton contribua également grandement à sa construction.

Comme presque toute contribution scientifique, Black & Scholes se sont basés sur les travaux d'une multitude de chercheurs et de praticiens, principalement ceux de Sprenkle (1961) et Samuelson (1970). Black lui-même, avant de travailler aux côtés de Myron Scholes, s'était déjà longuement penché sur la littérature des warrants. Il se basait alors sur le MEDAF en l'appliquant à chaque instant afin de formuler une liaison entre le taux de rentabilité du warrant, le temps et le prix du sous-jacent, tout en prenant en compte le taux sans risque. En utilisant le MEDAF, qui pour rappel, utilise le **risque total** d'un actif afin d'en déterminer le prix, Black révolutionnait déjà une idée établie à l'époque : le fait de ne prendre en compte que le risque systématique (puisque le risque spécifique est diversifiable et donc supposément non-pertinent). Black rencontrera ensuite Myron Scholes en 1969 et les deux auteurs vont collaborer afin de créer leur modèle qui apparaîtra dans un article publié en 1973, avec la participation de Merton Miller (Albouy et Charreaux, 2017).

#### 2.3.2.2 Hypothèses et argument central

Black, Scholes et Merton émettent une multitude d'hypothèses :

- Tout d'abord, les hypothèses habituelles de perfection des marchés déjà présentées pour les modèles de Markowitz et de Sharpe (absence de frais de transactions, possibilité d'emprunter et prêter au même taux sans risque, possibilité de vendre à découvert, absence de mémoire des marchés financiers...);
- Les cours boursiers suivent une distribution gaussienne, et plus précisément un mouvement de type brownien (voir ANNEXE 2 : définition mouvement brownien).
- Aucun dividende ou autre paiement n'est distribué aux investisseurs ;
- Les investisseurs sont rationnels dans le sens du CAPM.

Un autre élément important sur lequel se base la formule de Black & Scholes est l'argument *d'arbitrage*. « Un arbitrage est une opération qui permet de générer un revenu sans mise de fonds et sans risque » (Albouy et Charreaux, 2017, p.197).

Une telle opération sera directement exploitée par des investisseurs rationnels, ce qui va immédiatement modifier les valeurs de marchés jusqu'à faire disparaître cette opportunité d'arbitrage. Au sens de la formule de Sharpe, la formule développée dans ce modèle est également une formule d'équilibre, mais qui est ici obtenue lorsque les opportunités d'arbitrage disparaissent.

Cet argument d'arbitrage va poser certaines conditions extrémales au modèle qui vont conduire à la construction de l'égalité qui traduit l'absence d'opportunité d'arbitrage (par exemple, à maturité T le prix de l'option doit être égal au maximum de zéro ou du prix de l'actif sous-jacent moins le prix d'exercice). On obtient alors (Albouy et Charreaux, 2017) :

$$C'_t = rC - \frac{1}{2} C''_{SS} \sigma^2 S^2 - rSC'_S$$

Où C est l'inconnue, le prix de l'option call ;

r est le taux sans risque ;

$\sigma^2$  est la volatilité du sous-jacent S.

Cette formule n'est autre que l'équation différentielle sur laquelle Black a passé de nombreux mois, voire années, et qu'il finit par trouver avec l'aide de Scholes.

### 2.3.2.3 Modèle mathématique

Pour ce point, j'ai décidé de ne présenter qu'une brève partie du modèle, étant donné sa complexité mathématique. Dans un premier temps, Black lui-même ne parvint pas à résoudre l'équation différentielle à la base du modèle malgré sa formation de mathématicien et de physicien. La complexité du modèle s'explique par la nature continue du temps qui devra être prise en compte dans la construction de l'équation.

Pour commencer, imaginons une petite mise en situation. Soit une option d'achat sur le S&P 500 au prix d'exercice  $K = 3500\$$  et à maturité  $T = 31$  juillet. Nous sommes aujourd'hui le 23 mai et le S&P se trouve à 2900\$. On se trouve donc fortement en dessous de la monnaie, mais l'option ne vaudra-t-elle rien pour autant ? Pas nécessairement, cela dépendra de deux facteurs. Premièrement, combien de temps reste-t-il ? Nous ne sommes qu'en mai, le S&P a donc encore plus de deux mois pour atteindre le prix d'exercice. Deuxièmement, il faut regarder la probabilité que le S&P réalise une montée de cours si importante dans le laps de temps qu'il reste. Cette probabilité dépend de la manière dont le cours évolue habituellement, représentée par sa *volatilité*. Un des premiers postulats émis par les auteurs est donc que la valeur d'une option dépend à la fois **du temps restant avant maturité** (puisqu'on est ici dans le cas d'une option européenne) et **de la volatilité du prix du sous-jacent**.

Les auteurs vont ensuite partir de l'équation différentielle présentée dans le point précédent et poser certaines conditions afin de lui trouver une solution (les équations différentielles admettent plusieurs solutions, il est donc nécessaire de poser certaines conditions afin de faire ressortir une solution appropriée). La formule finale, qui

donnera le prix de l'option une fois les différents paramètres déterminés, est la suivante (Albouy et Charreaux, 2017) :

Formule de Black & Scholes

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{r(T-t)}N(d_2)$$

Et

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma \sqrt{(T - t)}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma \sqrt{(T - t)}}$$

Où :

- K = le prix d'exercice de l'option ;
- r = le taux sans risque ;
- T-t = le temps restant avant maturité ;
- $\sigma^2$  = la volatilité du sous-jacent (S).
- $N(d_i) = (\text{Prob}(d \geq d_i))$  = probabilité cumulée pour la loi normale centrée réduite au point  $d_i$  pour  $i = 1$  et  $i = 2$

#### 2.3.2.4 Autres contributions

La formule de Black & Scholes est sans aucun doute l'article le plus impactant ayant été produit par les deux auteurs. Leur contribution à la finance ne se limite cependant pas à ce modèle. Effectivement, Black en particulier consacre de nombreux articles au CAPM et à la théorie de l'efficacité des marchés. Il réalise notamment plusieurs tests empiriques du MEDAF au début des années 1970, seul ou avec la collaboration d'autres économistes. Dans une de ses études, il trouve même une anomalie au CAPM et tente de la corriger en modifiant une des hypothèses du MEDAF : il émet alors le postulat que la possibilité d'emprunter au taux sans risque est limitée. Cette version du CAPM sera connue sous le nom du modèle SBL (Sharpe, Linter et Black).

### 2.3.3 Fama et le modèle à trois facteurs

#### 2.3.3.1 Introduction

Concentrons-nous maintenant sur un des auteurs les plus productifs de notre temps ; Eugène F. Fama. Ses travaux ont contribué à une multitude de sujets différents. On cite notamment la théorie de l'agence, l'évaluation de titres risqués, l'aide à la gestion de trésorerie et plus encore. Ses travaux peuvent être regroupés en trois sections :

- La modélisation du risque et la relation rentabilité-risque.

- L'efficacité informationnelle des marchés ;
- L'aide à la décision de gestion.

Dans le cadre de ce mémoire, la section que je vais analyser est la première, dans laquelle Fama étudie la relation entre la rentabilité exigée par les actionnaires et le risque perçu. Le point qui est particulièrement intéressant dans cette section est le modèle à trois facteurs, que Fama développe en collaboration avec Kenneth French en 1993 et qui tente de pallier certaines lacunes de la version du MEDAF proposée par Sharpe.

### 2.3.3.2 Le modèle à trois facteurs

Rappelons-le, l'idée du MEDAF est de faire ressortir une source de risque unique : le Bêta ( $\beta_i$ ), qui représente l'exposition d'un titre  $i$  au risque de marché. Selon Fama et French, cette mesure de risque ne suffit cependant pas à expliquer les différences de rentabilité entre différents titres. Ils estiment que réduire le risque à un facteur unique ne représente pas la réalité, et décident donc d'ajouter deux facteurs qui représentent les différentiels entre différentes classes d'entreprises, les trois facteurs pris en compte dans ce modèle sont donc :

- Facteur taille : SMB (Small Minus Big). Les entreprises y sont réparties en deux groupes de même taille en fonction de leur capitalisation boursière : B (big) et S (Small) ;
- Facteur value : HML (High Minus Low). Les entreprises sont réparties en trois classes en fonction de leur book-to-market equity (ci-après ratio BE/ME). Les deux classes extrêmes, regroupant chacune 30% des effectifs, sont notées H (high) et L(low), respectivement les valeurs de substance, ou valeur avec un ratio BE/ME élevé, et les valeurs de croissances, ou valeurs avec un ratio BE/ME plus faible ;
- Facteur de marché : ce facteur, qui provient du MEDAF, est conservé dans ce modèle. Le Bêta est donc toujours utilisé pour estimer la sensibilité du titre au facteur de marché.

Le choix des deux nouveaux facteurs s'explique par une observation réalisée par les auteurs au cours de leurs études empiriques : en plus d'une prime de risque, on peut observer une prime pour les entreprises de petite taille ainsi qu'une prime pour les valeurs de substance.

Le modèle met donc en lien ces trois facteurs à travers la formule suivante (Albouy et Charreaux, 2017) :

$$E(R_i) - R_f = \underbrace{\beta_i \times [E(R_M) - R_f]}_{\text{facteur de marché}} + \underbrace{\beta_i^{SMB} \times E(SMB)}_{\text{facteur taille}} + \underbrace{\beta_i^{HML} \times E(HML)}_{\text{facteur value}}$$

*le MEDAF*

Avec :

$\beta_i$  = sensibilité du titre au facteur de marché ;

$\beta_i^{SMB}$  = sensibilité du titre i au facteur taille ;

$\beta_i^{HML}$  = sensibilité du titre i au facteur value ;

$E(R_i)$ ,  $E(R_M)$ ,  $E(SMB)$ ,  $E(HML)$  respectivement les espérances de rentabilité du titre i, du marché, du facteur taille et du facteur value ;

$E(R_i) - R_f$  = la prime de risque par rapport au taux sans risque.

### 2.3.3.3 Autre contribution

Une autre contribution majeure d'Eugène Fama porte sur le sujet de l'efficience des marchés que j'ai présentée brièvement dans les hypothèses de la théorie moderne du portefeuille. Cette hypothèse est fort importante. Effectivement, si toute la théorie classique va se baser sur le prix des actifs et leur évolution, il est primordial que ces prix reflètent parfaitement la réalité du marché en incorporant toutes les informations disponibles. Si cette hypothèse se révèle être fausse, le modèle sur les prix proposé par les auteurs de l'école classique serait faussé. Cette hypothèse signifie également que, étant donné qu'à tout instant toutes les informations disponibles sont représentées dans les cours de bourse, les changements et événements d'hier n'ont aucun effet sur les variations de cours d'aujourd'hui. Chaque fluctuation de prix est indépendante des précédentes et est immédiatement et parfaitement incorporée dans les prix. Je ne développerai cependant pas plus cette hypothèse d'efficience des marchés que ce qui est déjà expliqué dans le point 2.2, qui regroupe les informations les plus importantes à retenir sur ce sujet (Albouy et Charreaux, 2017).

## Chapitre 3 : Remise en cause du modèle classique

Comme expliqué au début de ce mémoire, le modèle classique de la finance que je viens de présenter est victime de nombreuses critiques depuis sa sortie. Le nombre de travaux réalisés sur cette remise en cause du paradigme dominant n'a fait qu'augmenter ces dernières décennies, alimenté par les crises financières que nous avons traversées dernièrement. À travers ces travaux, certaines limites théoriques et empiriques du modèle de Markowitz (qui pose les bases et dont les hypothèses sont réutilisées, c'est donc principalement ce modèle que je remets en question) ressortent régulièrement :

### **3.1 Limites théoriques et empiriques**

#### **3.1.1 Limites théoriques**

##### a) Statisme du modèle de Markowitz

Une des caractéristiques problématiques du modèle de Markowitz est qu'il soit statique. Par statique j'entends le fait que la matrice variance-covariance créée dans le processus soit supposée constante dans le temps. Cette supposition paraît cependant être erronée. En effet, selon une étude de Campbell, Koedijk et Kofman (2002), la corrélation des rendements d'une classe d'actif diffère en fonction de la situation du marché. Dans un marché dit bearish (où on observe une diminution globale des prix), la corrélation des rendements a tendance à être beaucoup plus élevée que dans un marché dit Bullish (où les prix augmentent).

##### b) Mesure de risque contre-intuitive

La théorie moderne du portefeuille, comme expliqué précédemment, répond au besoin par l'absence d'une mesure de risque des actifs financiers en incorporant la matrice variance-covariance à son processus d'allocation d'actifs. Cette mesure du risque par la variance n'est tout simplement pas en accord avec la définition intuitive du risque puisqu'elle considère négative tant la variance en dessous de la moyenne (à gauche de la moyenne sur le graphique) que celle au-dessus (à droite sur le graphique). Afin de contrer ce problème, d'autres outils de mesures de risque furent proposés au fil du temps : la semi-variance, la Value-At-Risk. Je développerai notamment le concept de Value-At-Risk plus loin dans ce mémoire.

Les deux points précédents (statisme de la covariance et mauvaise mesure du risque) mènent également à une diversification pauvre et donc un rendement sous optimal.

##### c) Irrationalité des investisseurs

Bien que ce soit une des hypothèses majeures sur lesquelles se base le modèle classique, l'hypothèse de rationalité des investisseurs est souvent remise en cause. Effectivement,

le comportement des investisseurs durant les dernières crises économiques et financières ne laisse pas penser que toutes leurs décisions sont prises de manière rationnelle et dans le seul but de maximiser leur utilité. Cette étude de l'hypothèse de rationalité a mené à la création d'une nouvelle théorie qui ne cesse de prendre de l'ampleur : la finance comportementale, qui prend en compte les biais comportementaux des investisseurs liés aux influences émotionnelles, sociales, et autres. Ceci constitue cependant tout un autre débat dont le développement demanderait à lui seul tout un mémoire, au vu de la quantité de littérature existante ayant pour but de définir la notion de rationalité.

#### d) Hypothèse de non-efficience des marchés

L'hypothèse d'efficience des marchés fut également remise en question maintes fois. Ces dernières années, voir décennies, nous avons pu être témoins d'un découplage entre l'économie réelle et les marchés financiers, laissant penser que ces derniers ne reflètent plus l'information disponible, mais évoluent en fonction des spéculations des différents investisseurs. Durant les dernières crises, et en particulier la crise des subprimes de 2008, on a ainsi pu observer une chute vertigineuse des prix de certains actifs financiers en dessous de la valeur intrinsèque de leur sous-jacent. Au même titre que l'hypothèse de rationalité des investisseurs, énormément de littérature est déjà consacrée à ce sujet, je ne m'attarderai donc pas plus dessus.

#### e) Défaillance de la finance linéaire : hypothèse des variations continues

Cette hypothèse, utilisée dans la création de chacune des théories présentées précédemment, permet l'utilisation des fonctions continues et des équations différentielles. La finance n'est cependant pas une science de la nature, et tous les jours, les différentes bourses connaissent des « déséquilibres d'ordres » sur une multitude de titres qui doivent être corrigés manuellement. Les prix sont alors modifiés en un coup à la baisse ou à la hausse afin de correspondre à un prix d'équilibre acceptable. De plus, les réglementations des autorités de tutelle des différentes bourses encouragent les parties prenantes à assurer la continuité des marchés et imposent des directives à respecter en cas de discontinuité. Cette faille, bien que qualitative, montre très clairement que les prix suivent un processus discontinu.

### 3.1.2 Limites empiriques

#### a) Un modèle d'optimisation des erreurs d'estimation ?

Le modèle de Markowitz repose sur deux facteurs : le rendement et la variance. L'allocation choisie par le modèle offrira alors une performance optimale. Cette performance n'est cependant pas inconditionnelle puisqu'elle nécessite que les deux facteurs soient connus (on se retrouverait alors dans une allocation appelée « in-sample »). La réalité est cependant toute autre ; ces deux facteurs ne sont pas connus et doivent être estimés à l'aide de données historiques. Les estimations obtenues ne

reflètent cependant pas toujours parfaitement la réalité, et ces erreurs d'estimations peuvent alors causer des erreurs d'allocation d'actifs. Selon Michaud (1989), cela reviendrait donc à optimiser des erreurs d'estimations, ce qui engendre généralement une faible performance out-of-sample.

#### b) Distribution non-normale des rendements

L'hypothèse de normalité des rendements est l'hypothèse la plus restrictive posée par Markowitz dans la création de ce modèle puisque supposer une distribution gaussienne revient à n'utiliser que les deux premiers moments de la distribution : la variance et la moyenne. Ces deux moments suffisent lorsqu'il s'agit d'analyser une distribution de skewness 0 et de kurtosis de 3, mais peine à expliquer une distribution asymétrique ou une distribution plus ou moins plate. Ce phénomène s'observe principalement lors des situations de crise où la volatilité est très élevée, situation que nous connaissons depuis maintenant plusieurs mois à la suite de la crise sanitaire du Covid-19. C'est sur ce point que je baserai mon argumentation pour la remise en cause de la théorie classique de finance, je le développerai donc dans le chapitre dédié à l'étude empirique de la distribution des rendements.

#### c) Suite d'anomalies inexplicées.

Même si je parvenais à fermer les yeux sur ces différentes limites et que je me concentrais uniquement sur la question : est-ce que ce modèle fonctionne ? Je parviendrais tout de même à trouver d'autres « anomalies » que le modèle classique peine à expliquer, et qui contredisent le MEDAF et sa stratégie qui pousse à regarder le bêta, le bêta et uniquement le bêta.

Certaines de ces anomalies telles que le facteur taille des entreprises ou le facteur value furent incorporées à la théorie classique dans le modèle à trois facteurs présenté au début de ce mémoire, mais d'autres restent inexplicées par les modèles classiques. Je pense entre autres à l'effet cours/bénéfice qui montre que les actions d'entreprises avec un ratio cours/bénéfice élevé ont tendance à sous-performer par rapport aux autres (constat logique mais pas pris en compte par les modèles classiques), ou encore à l'effet janvier qui montre que les marchés ont tendance à bondir en janvier dû à la tendance qu'ont beaucoup d'investisseurs de vendre leurs titres à perte en décembre afin de masquer leurs mauvaises performances. On observe alors une baisse des cours, avec un rattrapage le mois suivant, en janvier.

### 3.1.3 Conclusion

Je pourrais dédier tout un chapitre à la présentation des limites des modèles se basant sur la théorie classique de finance, mais les quelques points cités ci-dessus suffisent à en montrer les lacunes. Des hypothèses qu'il pose à ses applications professionnelles, le modèle de Markowitz peine à représenter la réalité aux yeux des financiers actuels.



Comme l'explique bien le docteur Philippe Herlin (2012) : toutes les sciences ont connu durant le 20<sup>ème</sup> siècle leur « mue » à travers des innovations majeures et des révolutions conceptuelles : on peut notamment citer la théorie de la relativité et les quantas pour la physique, les gènes pour la biologie et la sociologie et psychanalyse pour les sciences humaines. Les sciences économiques restent cependant quelque peu à la traîne, en se reposant encore et toujours sur un paradigme basé sur des hypothèses irréalistes rendant les modèles qui en découlent scientifiquement insatisfaisants.

---

*“If you have always done it that way, it is probably wrong.” Charles Kettering.*

---

### **3.2 Les cours boursiers : une distribution normale ?**

#### **3.2.1 Le choc Bachelier-Mandelbrot**

Après avoir présenté le modèle classique et ses limites, il est temps de se lancer dans une étude empirique afin de déterminer si oui ou non, les cours boursiers suivent une loi normale.

Vers la fin des années 1950, le monde financier redécouvre les travaux de Bachelier que j'ai brièvement introduit au début de ce mémoire et s'en sert comme base pour la création d'une multitude de modèles financiers. Benoit Mandelbrot, de son côté, trouve que la théorie de Bachelier ne correspond pas à la réalité des marchés financiers.

Tout d'abord, les fluctuations de prix ne sont pas indépendantes les unes des autres. La littérature et les faits ont montré au fil du temps que les cours de bourse détiennent une sorte de « mémoire ». Il y aurait donc un réel phénomène d'inertie, aujourd'hui influence demain, et demain influence le jour d'après. Une journée où les prix chutent ou montent violemment sera bien souvent suivie d'une journée à volatilité tout aussi élevée, une action qui grimpe durant trois jours de suite aura plus de chance de continuer sa progression le quatrième jour (comme expliqué dans le point sur la création des bulles). Plusieurs hypothèses peuvent être émises sur les raisons qui expliquent ce phénomène d'inertie :

- Ce qu'une société fait aujourd'hui aura un impact sur son fonctionnement pendant plusieurs années, on ne peut prédire l'effet d'une mesure le jour où elle est mise en place.
- Le marché ne sait pas totalement absorber une information le jour de sa sortie et la refléter dans les prix, certains investisseurs réagissent directement tandis que d'autres attendent, parce qu'ils sont moins réactifs ou tout simplement parce qu'ils désirent voir « comment cela va tourner ».

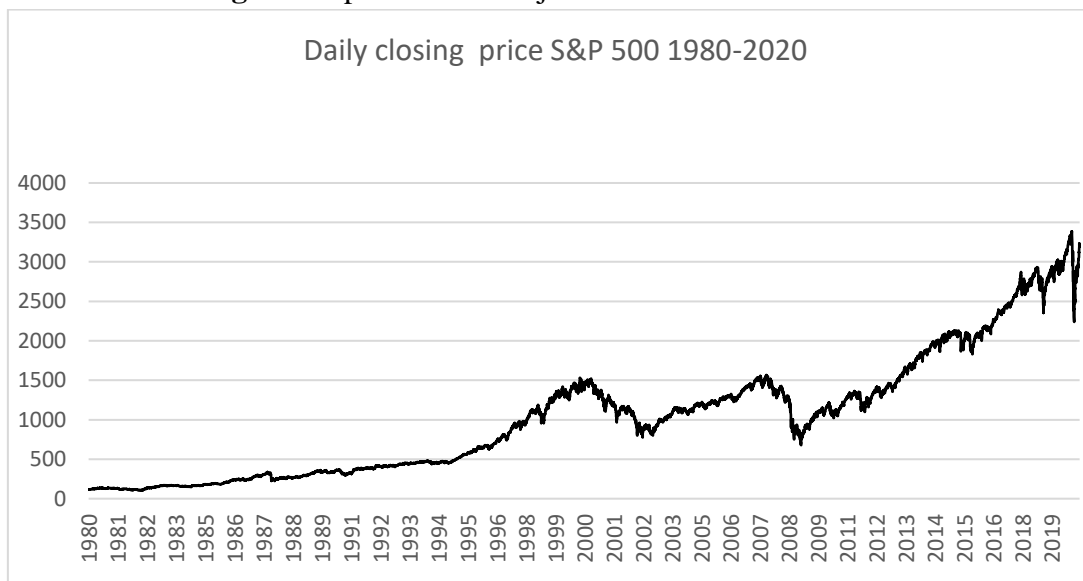
Seconde critique émise ; Mandelbrot s'oppose fermement à l'hypothèse de normalité des cours de bourses émise par Bachelier. Il argumente en expliquant que si c'était le cas, on pourrait prendre n'importe quel échantillon d'historique de cours et obtenir un graphique en cloche avec sa représentation graphique. Cependant, ce n'est pas le cas. Les graphiques montrent des « fat tails », des extrémités de taille beaucoup trop importante que pour correspondre à la courbe gaussienne. Mandelbrot et Hudson (2006) prennent alors l'exemple de l'historique de cours du Dow Jones entre 1916 et 2003. Selon la loi normale, il ne devrait y avoir eu sur cette période que 58 jours où les variations du Dow dépasseraient 3.4%. En réalité, on en observe 1001. Un mouvement de l'indice de plus de 7% ne devrait survenir qu'une fois tous les 300.000 ans, alors que sur cette période nous avons connu 48 jours avec une telle volatilité. Il semble donc exister un réel fossé entre l'hypothèse de normalité des rendements boursiers, sur laquelle se base l'entièreté de la théorie classique financière, et la réalité. Nous vivons en ce moment même une période de forte volatilité, une période de crise sanitaire et financière qui pousse vraisemblablement l'économie mondiale dans une récession qui pourrait être la pire jamais connue. Malgré la tristesse et la sévérité de cette situation, je ne puis m'empêcher d'y voir une opportunité de vérifier cette hypothèse avec les données récentes afin de voir si, en situation de forte volatilité, la distribution des cours de bourse suit une distribution en loi de puissance et non une distribution normale.

### 3.2.2 Compte rendu illustré

Pendant longtemps, les images furent peu utilisées en science. Elles pouvaient prêter à confusion, induire en erreur due à leur imprécision ou à cause de la facilité qu'à l'œil humain à avoir une vue biaisée, à imaginer des tendances où il n'y en a pas. Aujourd'hui, avec l'utilisation répandue des ordinateurs et des logiciels permettant de réaliser des graphes précis, il est devenu intéressant de les utiliser, non pas comme élément principal dans une argumentation, mais bien comme support permettant de comparer divers phénomènes et d'aider à leur compréhension. C'est pourquoi j'ai décidé, avant de me lancer dans les tests de normalité, de comparer différents graphiques de prix.

J'ai décidé de réaliser mon étude sur l'indice S&P 500 (Standard and Poor's 500). Cet indice est constitué de 500 entreprises pondérées en fonction de leur capitalisation boursière, à la différence du Dow Jones Industrial Average qui effectue sa pondération en fonction de la valeur des actions le composant. Bien que cet indice peine à représenter le marché des small et mid-cap, il couvre tout de même environ 80% du marché boursier américain et est pour cette raison considéré par beaucoup comme l'indice le plus représentatif du marché américain. J'ai décidé pour les représentations graphiques de prendre un échantillon de 40 ans, afin d'y inclure les crises financières les plus récentes. Les données ont été récoltées à la date du 11 juin 2020 sur le site internet du Wall Street Journal (s.d.). Analysons maintenant les graphiques obtenus à partir de ces données.

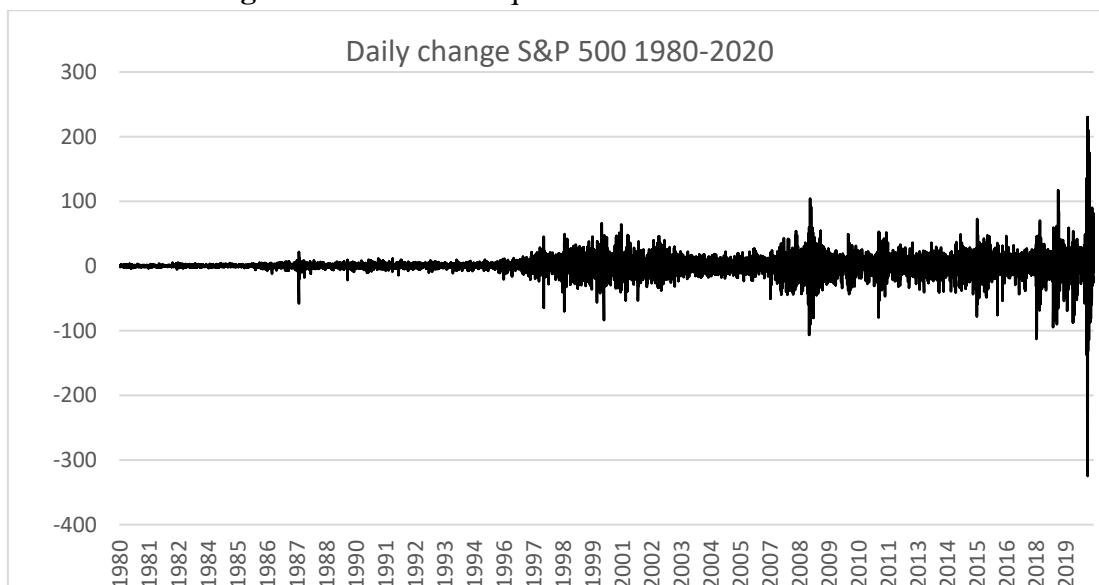
**Figure 9 : prix de clôture journaliers S&P 500 1980-2020**



On remarque une tendance générale à la hausse, accompagnée de quelques chutes importantes en 2000, 2008 et 2020 avec respectivement la bulle dot-com, la bulle immobilière et la pandémie du Covid-19. On remarque cependant que jusqu'à la fin des années 90, les prix étaient fort stables, avec une légère tendance à la hausse certes, mais peu de variations brusques.

Prenons alors une autre approche afin de voir cela de plus près :

**Figure 10 : variations quotidiennes S&P 500 1980-2020**



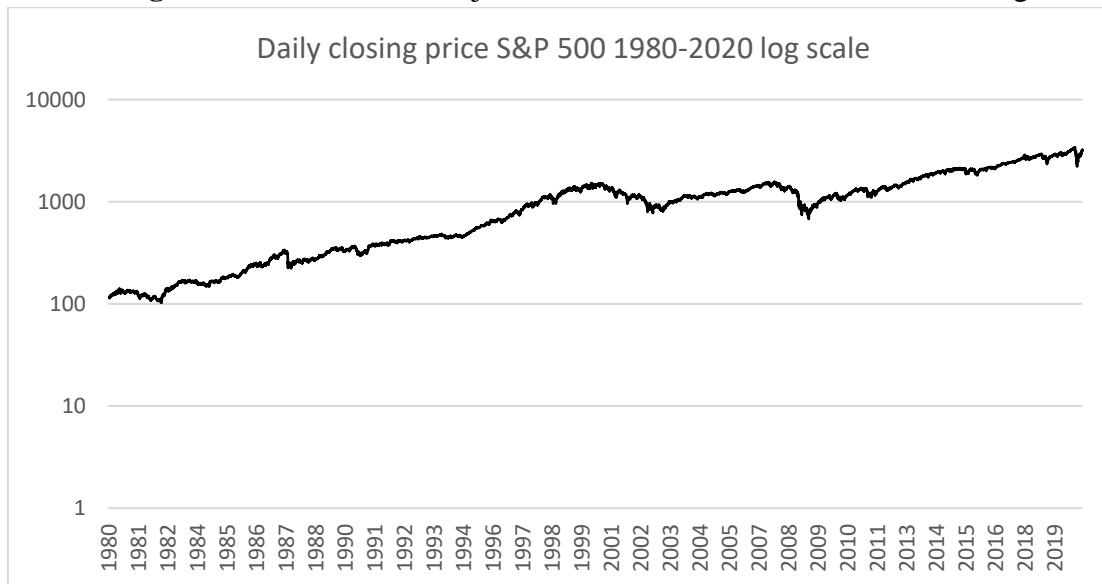
Le graphique ci-dessus montre le changement d'un jour à l'autre.

On remarque ici effectivement une forte augmentation de l'amplitude des changements vers la fin du 20<sup>ème</sup> siècle, avec les fortes hausses souvent accompagnées de chutes vertigineuses des prix. Cette vision peut cependant être trompeuse puisqu'une

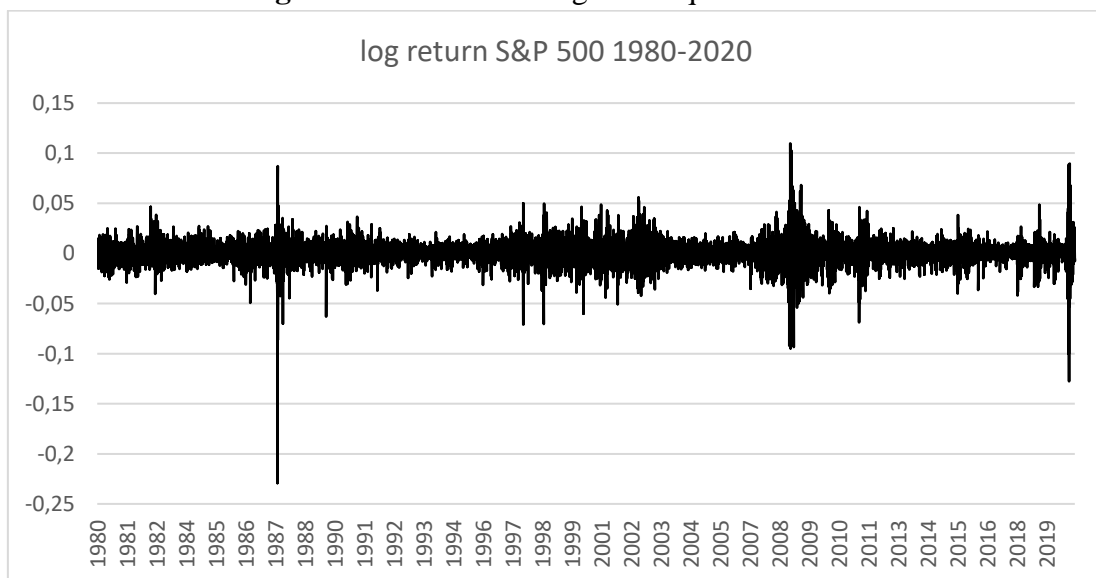
augmentation de \$1 en 1980 représentait presque une augmentation d'un pourcent alors qu'en 2020 une augmentation de \$10 ne représente même pas 0,5%. C'est pour cette raison que le S&P semble être plat, dénoué de volatilité avant la fin des années 2000 sur le graphique.

Afin de remédier à ce problème, reproduisons les deux graphiques mais sur une échelle logarithmique.

**Figure 11 : Prix de clôture journaliers S&P 500 1980-2020 échelle log**



**Figure 12 : rendement logarithmique S&P 500 1980-2020**



On retrouve donc les mêmes valeurs, mais mises à une échelle logarithmique. Cela permet d'analyser les variations de prix sous une même échelle afin d'avoir une idée du ressenti laissé par les variations aux investisseurs à l'époque. Une variation de 1% en 1980 sera représentée de la même manière sur le graphique qu'une augmentation de 1% en 2019.

À l'aide de ce graphique, on remarque que l'indice est plus équilibré, avec une bonne partie des variations qui se fondent dans un même trait. Certaines dates sortent cependant du lot en montrant des variations extrêmes et souvent centrées à certains endroits. On retrouve donc à nouveau le crash de la bulle internet qui s'étend autour de l'an 2000, la crise des subprimes en 2008-2009 et la crise provoquée par la pandémie de Covid-19. Une autre crise, d'amplitude encore plus grande que les autres, apparaît cependant dans ce graphique : la crise de 1987, qui était à peine discernable dans le graphique de variations journalières classique. Les graphiques que j'ai montrés jusqu'ici sont réalisés à partir d'historiques de cours réels d'un indice considéré comme fort représentatif du marché dans son entièreté, on peut donc les prendre comme exemple servant à représenter la réalité des marchés financiers.

Il serait alors intéressant de les comparer à un graphique créé à partir du modèle de bachelier. Pour ce faire, j'ai effectué deux simulations qui répondent toutes les deux aux critères de l'école classique : les fluctuations de prix sont indépendantes dans le temps et suivent une distribution aléatoire selon la loi normale.

La première est une simulation de mouvement brownien, mouvement introduit par Bachelier et qui sert de base à tous les modèles de l'école classique. Ce mouvement peut cependant prendre des valeurs négatives, cela le rend donc inadapté à la modélisation de prix boursiers. Afin de pallier ce problème, j'ai utilisé les données de ma simulation du mouvement brownien afin de réaliser la deuxième simulation à partir d'un **mouvement brownien géométrique**, qui est l'un des modèles les plus utilisés dans les simulations de Monte-Carlo ainsi que pour modéliser le cours des actions dans le modèle de Black & Scholes (Mandelbrot et Hudson, 2006).

À la différence du modèle brownien classique, le mouvement brownien géométrique est un processus stochastique (ou aléatoire) à valeurs positives, ce qui signifie qu'il n'admet pas les valeurs négatives et est donc parfait pour notre expérience. Effectivement, le mouvement brownien géométrique émet l'hypothèse qu'à chaque période le cours va augmenter d'une certaine valeur (une certaine « dérive » ou drift en anglais) augmentée ou diminuée par un choc aléatoire, qui est égal à l'écart-type multiplié par un nombre aléatoire « e ». Le cours montre alors une tendance à la hausse perturbée par une multitude de chocs mineurs.

La formule utilisée pour cette simulation est la suivante (Teknomo, 2017) :

$$X^T = x_0 * \exp(\mu - 0,5 * \sigma^2) * t * \sigma * w_t$$

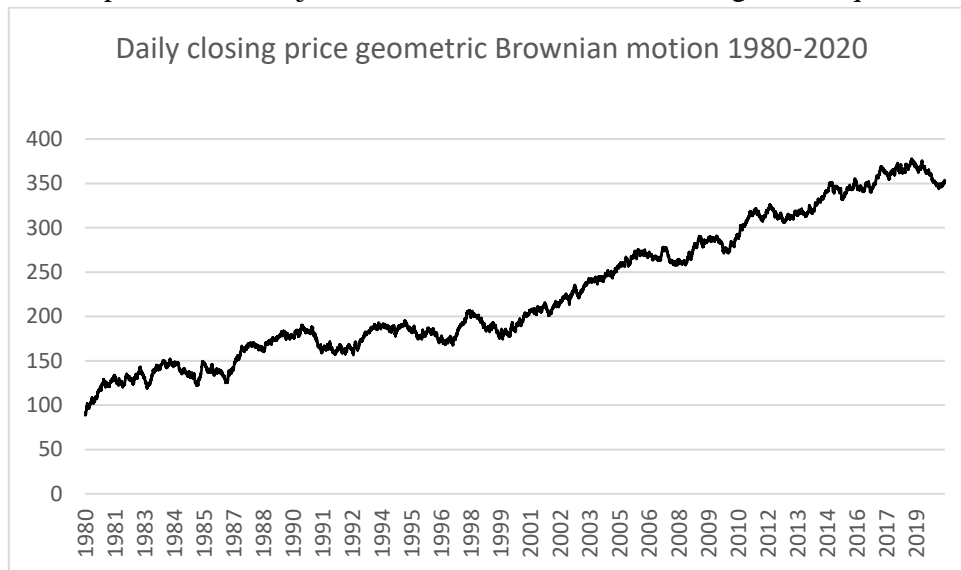
Avec  $X(0)$  = valeur initiale du cours ;

$W_t$  est la valeur donnée par le mouvement brownien standard ;

$\mu$  et  $\sigma$  sont deux constantes et représentent respectivement le drift et la volatilité de la distribution.

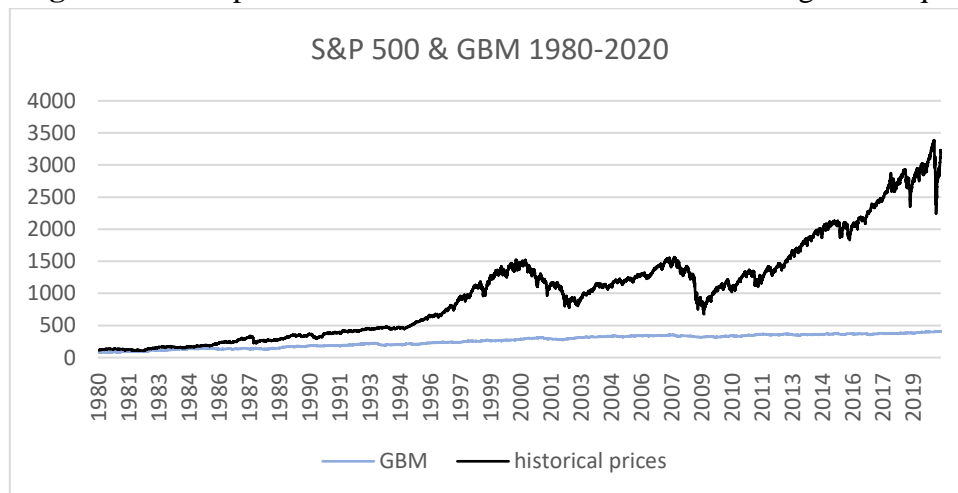
En utilisant les mêmes méthodes que celles utilisées sur le S&P 500, on obtient les graphes suivants :

**Figure 13 :** prix de clôture journaliers mouvement brownien géométrique 1980-2020



À vue d'œil, on ne remarque rien qui sorte de l'ordinaire par rapport aux graphiques du S&P 500 présentés précédemment. Superposons maintenant les graphiques du S&P 500 et du GBM afin de pouvoir mieux les comparer.

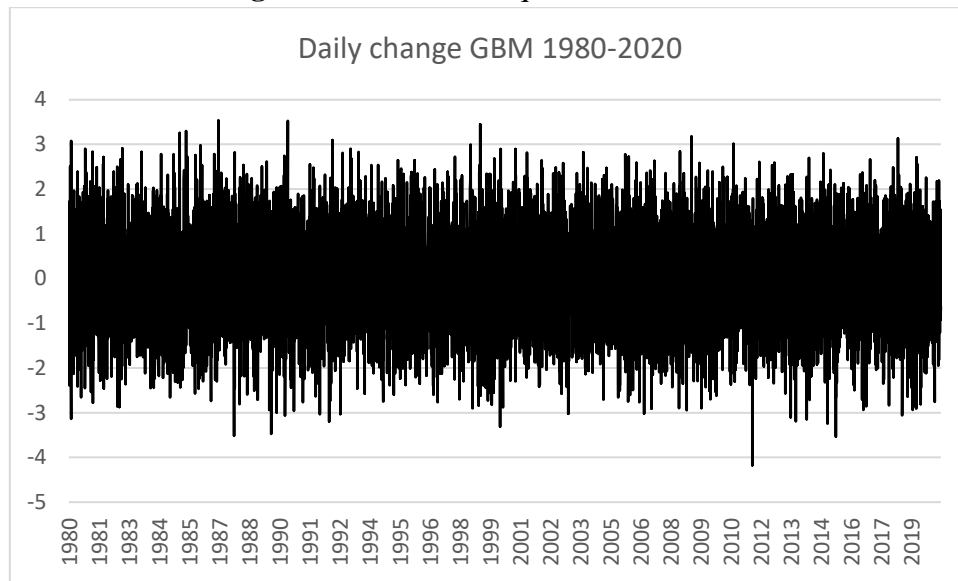
**Figure 14 :** comparaison S&P 500 vs mouvement brownien géométrique



Outre le fait que sa croissance est minime par rapport au S&P 500, cela pourrait très bien être le cours d'un réel actif financier ou indice.

Penchons-nous maintenant sur le graphique de variations journalières.

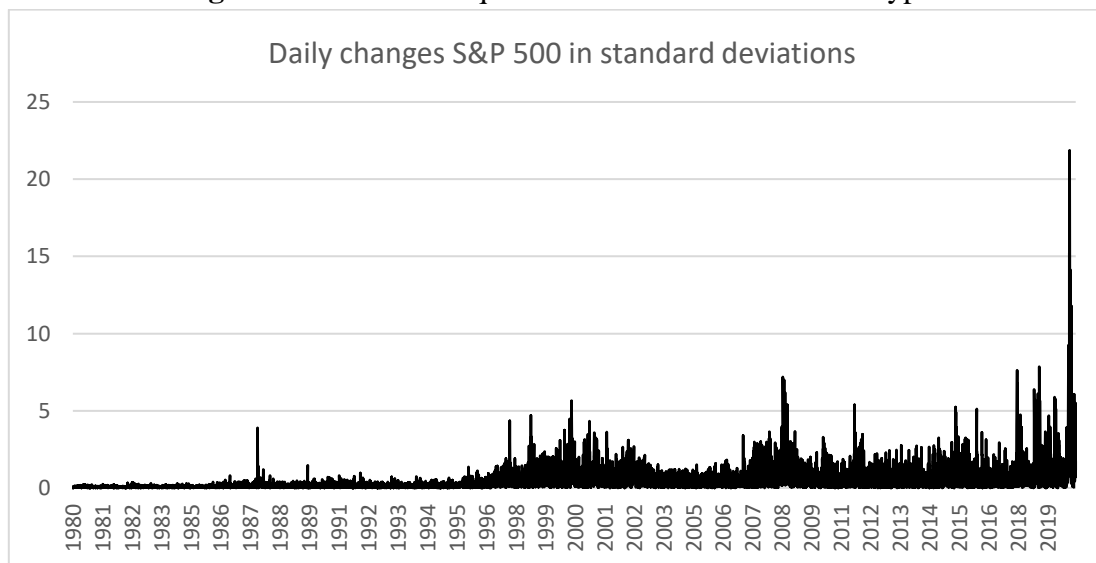
**Figure 15 : variations quotidiennes GBM**

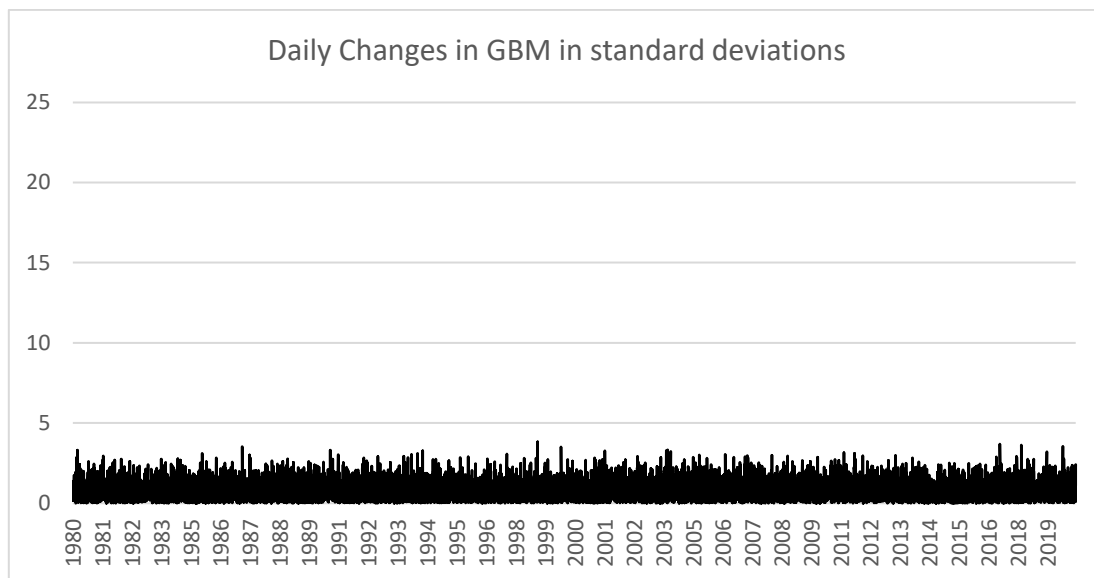


Si on compare ce graphe avec celui du S&P réalisé précédemment, on retrouve ici un schéma totalement différent. Les variations de prix se concentrent sur une faible amplitude (il faut faire attention aux valeurs de l'axe des ordonnées) et les fluctuations les plus fortes sont réparties uniformément sur l'entièreté du graphique plutôt que concentrées en quelques moments de crise. On discerne donc déjà une différence non négligeable entre la représentation graphique des variations de prix journalières d'un indice tel que le S&P 500 et ce qu'elle **devrait être** si elle respectait la loi de normalité.

Finalement, afin d'observer ce contraste de plus près, j'ai regardé ces données sous un autre angle, en analysant les variations journalières respectivement du S&P 500 et du mouvement brownien en utilisant l'écart-type des changements de prix quotidiens comme unité de mesure.

**Figure 16 : variations quotidiennes S&P 500 en écart-type**

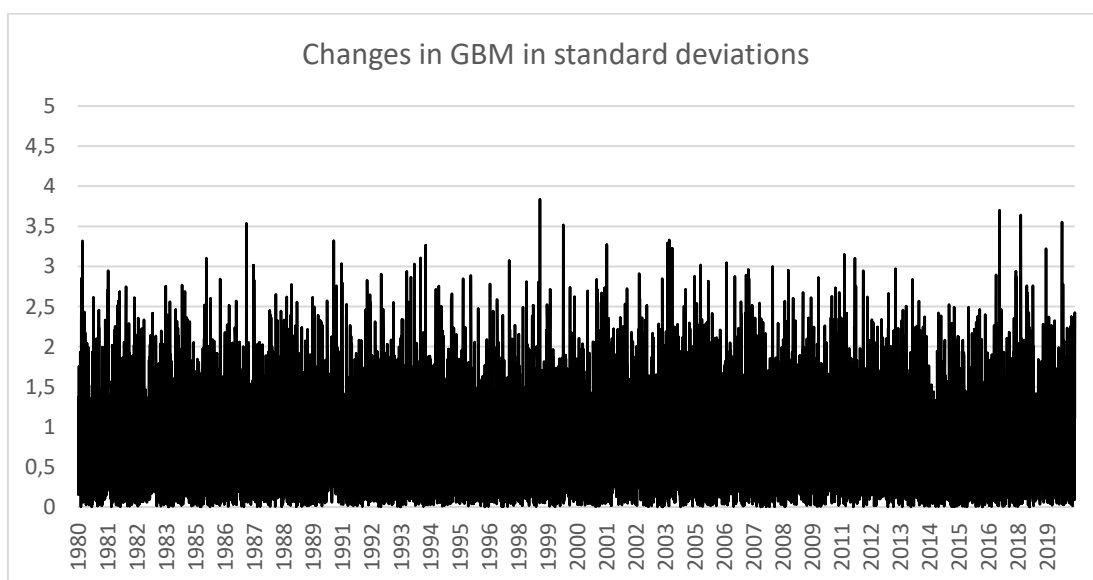




**Figure 17 :** variations quotidiennes GBM en écart-type

L'utilité de ces graphiques, formulée plus simplement, est donc d'avoir une idée de la rareté des fluctuations extrêmes pour les deux distributions. On remarque tout de suite la différence.

Le graphique du mouvement brownien géométrique montre que toutes les variations se trouvent en dessous de  $5\sigma$ .



**Figure 18 :** variations quotidiennes GBM en écart-type bis

En agrandissant quelque peu, on peut également observer que seule une infime partie des observations se trouvent au-dessus de  $3\sigma$  (sachant que le test fût réalisé en utilisant 10.086 données). La plupart des mouvements se trouvent en dessous de  $2\sigma$ , et plus de la moitié se trouvent en dessous de  $1\sigma$ . Il est impossible de deviner les pourcentages à vue



d'œil, mais ceux-ci sont bien connus. La loi normale indique que 68% des observations se trouvent à maximum  $1\sigma$  de la moyenne, 95% à  $2\sigma$  et 98% à  $3\sigma$ .

D'autre part, le graphique basé sur le S&P montre des pics gigantesques qui ressortent très clairement du tracé noir créé par les variations plus petites, avec un extrême en 2020 qui s'élève à environ  $22\sigma$  ! Une variation si extrême a une probabilité d'occurrence si minime dans une distribution gaussienne qu'elle n'est même pas reprise dans la table de la loi normale.

Je tiens à préciser que ces graphiques, bien qu'instructifs, ne suffisent pas à remettre en cause l'utilisation du théorème central limite. Il faudrait pour cela réaliser les mêmes tests sur d'autres indices, mais également appuyer les conclusions que j'ai tirées avec des tests de normalité, qui constitueront donc la prochaine étape de mon analyse empirique. Ils offrent cependant une représentation graphique du problème que pose l'utilisation de la loi normale et permettent de pousser les praticiens à remettre en question leur manière de faire, à la place d'écarter ces données extrêmes en les considérant comme des données aberrantes à ne pas prendre en compte. Comme l'a bien dit Paul H. Cootner (cité par Mandelbrot et Hudson, 2006, p.95) :

« to face up in a substantive way to those uncomfortable empirical observations that there is little doubt most of us have had to sweep under the carpet until now ».

### 3.3 Test de kurtosis et de skewness

Après avoir eu un aperçu des différences entre une distribution normale et la réalité, il est temps, comme expliqué précédemment, de vérifier empiriquement si les cours boursiers suivent une distribution normale. Pour ce faire, j'ai premièrement réalisé une analyse de la skewness et du kurtosis des rendements du S&P 500, respectivement le 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> moment de la distribution, en utilisant le même échantillon que celui utilisé précédemment.

Pour rappel, le kurtosis est une mesure du coefficient d'aplatissement d'une distribution. Ce coefficient décrit donc la forme de la distribution à travers la répartition des masses de probabilité de part et d'autre du centre.

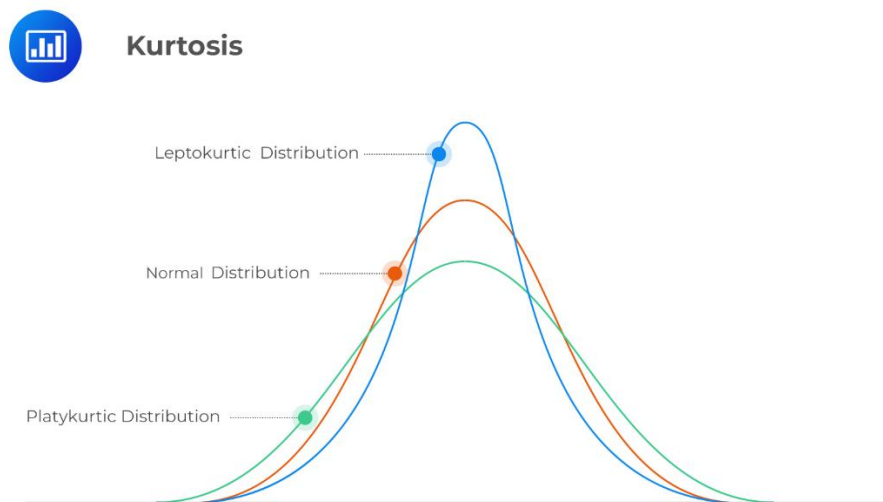
Il existe plusieurs types de kurtosis (Joseph, 2020) :

- Une distribution qui montre un kurtosis élevé ( $>3$ ) indique une courbe pointue et des extrémités plus longues, fines et étendues. Cette distribution sera alors qualifiée de **leptokurtique** et la probabilité d'y retrouver des événements extrêmes y sera plus élevée ;
- À l'opposé, on retrouve la distribution **platykurtique** (platykurtic en anglais), qui a un coefficient d'aplatissement plus faible ( $<3$ ), et qui montre une distribution plus arrondie autour de la moyenne, avec des extrémités moins longues et plus resserrées ;

- Au milieu de ces deux distributions se trouve la distribution **mésokurtique** ( $=3$ ), qui a des caractéristiques de kurtosis similaire à la loi normale.

Attention ! Il ne faut pas confondre kurtosis et excess kurtosis. Ces deux termes sont souvent confondus dans la littérature, alors qu'ils sont différents. L'excess kurtosis mesure le kurtosis supplémentaire par rapport au kurtosis d'une distribution normale, donc tout kurtosis au-dessus de 3. Ce concept est souvent utilisé par les praticiens par simplicité d'utilisation. Ils font alors tout simplement kurtosis  $- 3$  et déclare excess kurtosis tout nombre différent de zéro. C'est pourquoi ce graphique ci-dessous parle de kurtosis positif et négatif et non pas inférieur et supérieur à 3.

**Figure 19 : types de kurtosis**

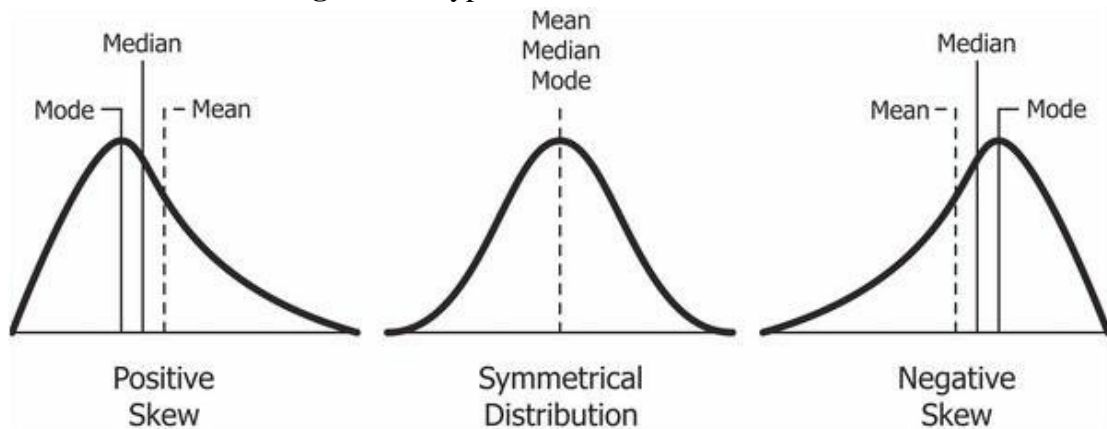


Source: Joseph, N. (2020, 9 juillet). Kurtosis and Skewness. Consulté le 6 juin 2020, à l'adresse <https://analystprep.com/cfa-level-1-exam/quantitative-methods/kurtosis-and-skewness-types-of-distributions/>

La skewness (coefficient d'asymétrie en français) mesure quant à elle, comme son nom l'indique, l'asymétrie d'une distribution.

- Si le coefficient est positif : la distribution est décalée vers la droite (la queue de distribution droite est plus longue que celle de gauche)
- Si le coefficient est **nul** : la distribution est symétrique, c'est le cas de la loi normale ;
- Si le coefficient est négatif : la distribution est décalée vers la gauche

**Figure 20 : types de skewness**



Source : K-means clustering | R. (s. d.). Consulté le 1 août 2020, à l'adresse <https://campus.datacamp.com/courses/practicing-machine-learning-interview-questions-in-r/unsupervised-learning-3?ex=1>

Afin de réaliser mon étude, j'ai décidé de choisir une multitude d'échantillons montrant des caractéristiques différentes, les voici :

- a) 11 juin 1980-10 juin 2020 : l'échantillon complet que j'ai étudié précédemment, il permet de réaliser le test sur l'ensemble des données à notre disposition ;
- b) 19 octobre 1987 – 30 novembre 1987 : période du Black Monday de 1987 ;
- c) 3 avril 2000 – 1 octobre 2002 : période de la bulle internet ;
- d) 19 février 2007 – 12 mars 2009 : période de la crise des Subprimes ;
- e) 18 février 2020 – 10 juin 2020 : période de la crise du Covid-19 ;
- f) 1980-2020 – b – c – d – e : je prends donc ici mon échantillon de base duquel je retire les différentes périodes de forte volatilité. Cela me permet de le comparer avec l'échantillon complet afin de vérifier si, dans l'hypothèse où ces périodes de crise n'avaient pas existé, la distribution serait normale, ou se rapprocherait plus de la normalité.

Les dates furent choisies en fonction de l'impact sur le S&P 500. Le premier jour représente la fin de la croissance et le début de la chute rapide du cours, et le dernier jour le « trough » de chaque chute (point le plus bas, début de la relance). Les données choisies sont les mêmes que celles utilisées pour le compte rendu illustré et proviennent donc du site internet du Wall Street Journal (s.d.).

Maintenant que les différents concepts et le scope temporel de l'analyse ont été définis, passons à la présentation des résultats :

On sait qu'une distribution normale doit avoir une skewness de zéro et un kurtosis de trois. Toute valeur fortement éloignée de ces dernières indiquerait une distribution non-normale. Cependant, afin de montrer qu'une distribution est réellement différente d'une distribution normale, il est conseillé de tester la signification statistique des paramètres estimés. Pour ce faire, il faut utiliser l'erreur-type afin de mesurer si la skewness ou le kurtosis sort de la dispersion « acceptable » autour de la moyenne de la population

(méthode conseillée par de nombreux scientifiques : George and Mallery (2010) ; Trochim and Donnelly (2006) ; Field (2009) ; Gravetter and Wallnow (2012) etc)

Premièrement, il faut donc calculer l'erreur-type. Pour ce faire, j'ai utilisé les formules ci-dessous (« Skewness & Kurtosis Analysis | Real Statistics Using Excel », 2017) :

- Erreur-type de la skewness :  $\sqrt{\frac{6}{n}}$
- Erreur-type du kurtosis :  $\sqrt{\frac{24}{n}}$

Où n est égal à la taille de l'échantillon.

Ainsi, au plus l'échantillon sera grand, au plus la dispersion sera petite et les chances d'avoir une moyenne fort éloignée de la moyenne réelle de la population seront amoindries.

J'ai ensuite utilisé les valeurs obtenues afin d'interpréter les valeurs de skewness et de kurtosis obtenues pour les différents échantillons de la manière suivante : si la valeur absolue du coefficient d'asymétrie est deux fois plus élevée que son erreur-type, on peut alors considérer que la distribution est asymétrique et donc non-normale. De la même manière, si la valeur absolue du coefficient d'asymétrie est deux fois plus élevée que son erreur-type, la distribution ne peut pas être qualifiée de mésokurtique et n'est donc pas considérée comme normale.

Afin de tester cette méthode, j'ai également créé un échantillon de 10085 variables aléatoires suivant une loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 1. Voici les résultats obtenus :

type de donnée	valeurs	Erreur-type	Normale?
Kurtosis	0,090064596	0,048783	oui
Skewness	0,00519813	0,024391	oui

**Tableau 2 : résultats échantillon normal**

Comme vous pouvez le voir, cette manipulation permet de vérifier la normalité de cet échantillon malgré le fait que son kurtosis et sa skewness soient différentes de zéro.

Passons maintenant aux résultats de mes échantillons :

Échantillon	Moment	Valeur	Erreur-type	Distribution normale?
1980-2020	Kurtosis	26,47273897	0,024391453	non
	skewness	-1,156669355	0,048782906	non
Black Monday 1987	Kurtosis	10,72413537	0,894427191	non
	skewness	-2,555240526	0,447213595	non
Bulle internet	Kurtosis	1,367455684	0,195646395	non
	skewness	0,159087116	0,097823198	oui
Crise des Subprimes	Kurtosis	5,416627299	0,214834462	non
	skewness	-0,130708203	0,107417231	oui
Crise du Covid19	Kurtosis	2,413649536	0,547722558	non
	skewness	-0,455274299	0,273861279	oui
1980-2020 sans crises	Kurtosis	1,591558929	0,052152229	non
	skewness	-1,529765732	0,026076114	non

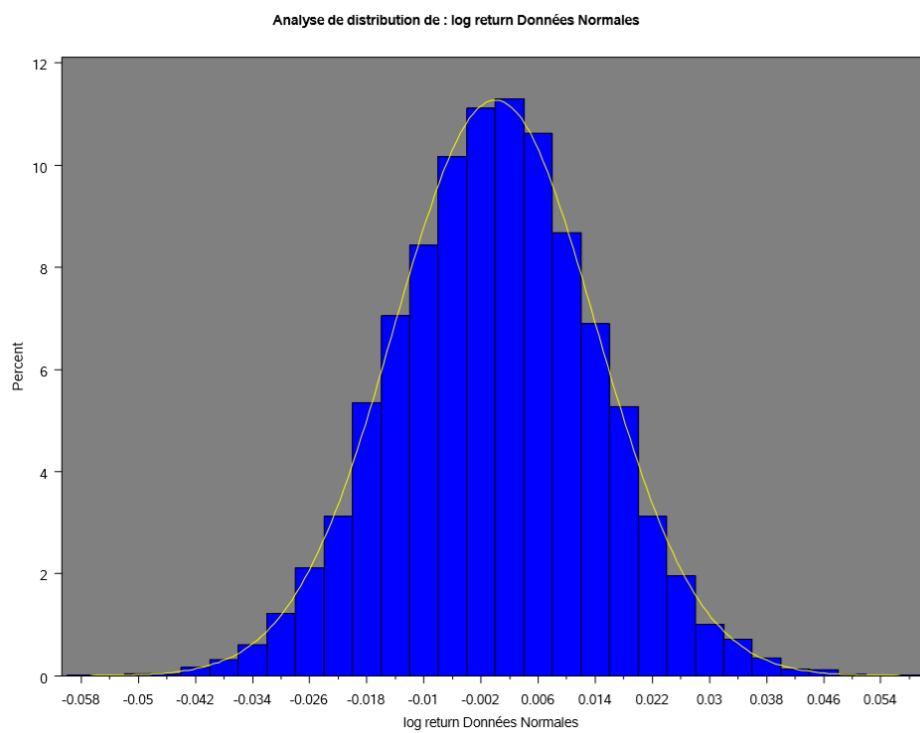
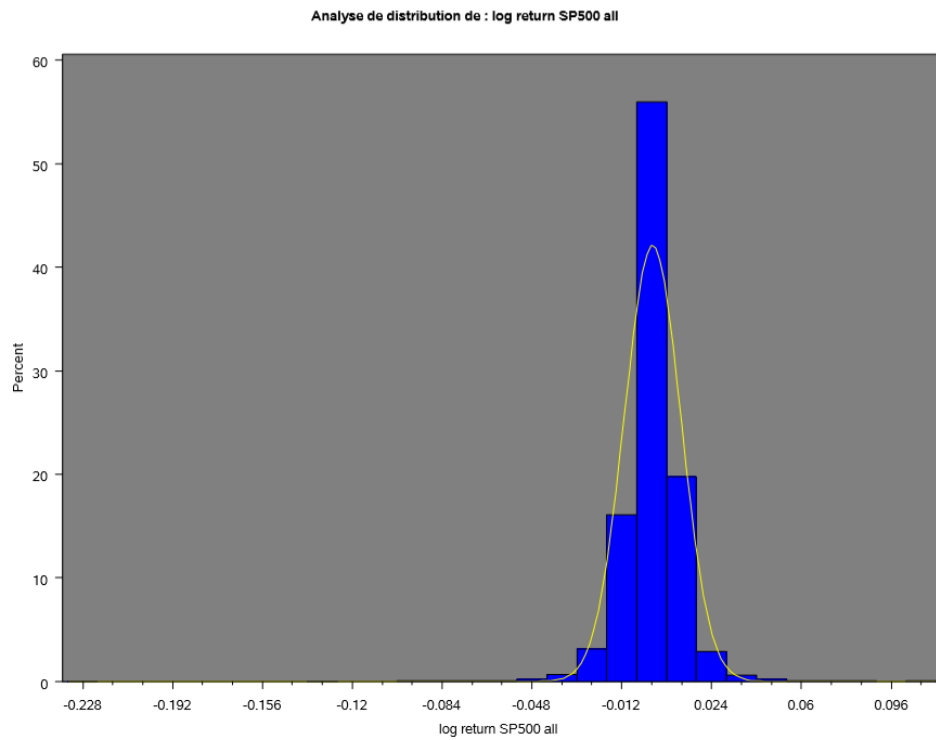
**Tableau 3 : test kurtosis & skewness échantillons S&P 500**

Avant toute chose, il est important de préciser que les valeurs de kurtosis sont calculées à l'aide de la fonction KURT() d'Excel, qui calcule l'**excess kurtosis** et non le kurtosis classique. Afin d'obtenir le kurtosis, il suffit de rajouter +3 aux valeurs ci-dessus.

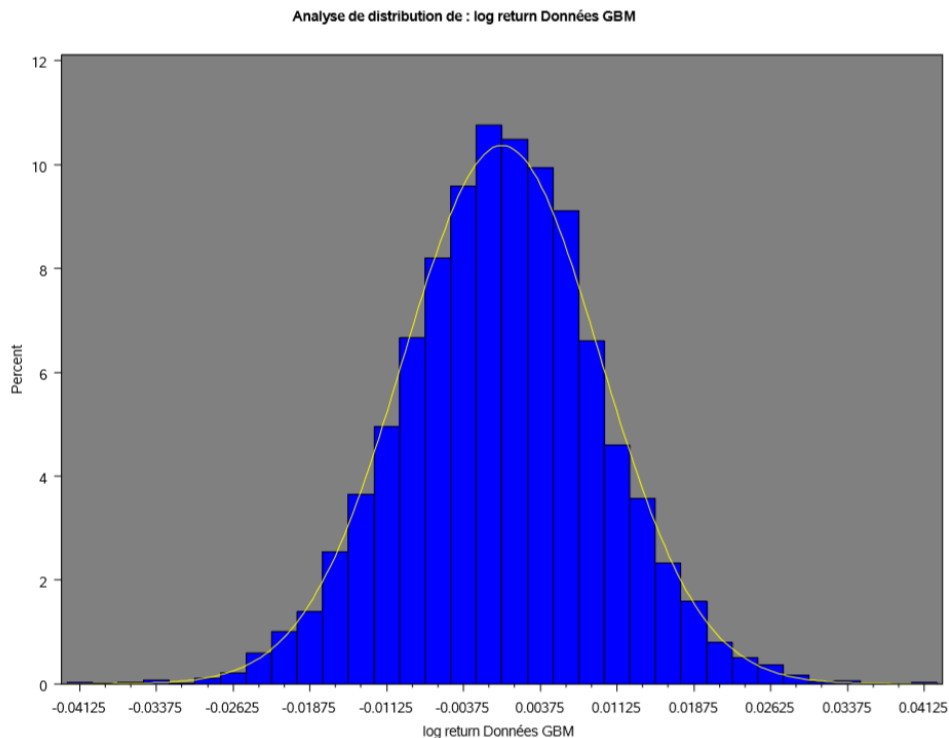
On observe directement que le kurtosis de l'échantillon complet est extrêmement élevé, nous avons donc affaire à une distribution **leptokurtique**, dans laquelle on a beaucoup plus de chance de retrouver des événements extrêmes. Ces données sont en accord avec celles que j'ai pu trouver dans la littérature, Wim Schoutens (2003), par exemple, montre que le S&P 500 présente un kurtosis de 43,36 entre 1970 et 2001.

Le fait que les distributions boursières présentent un kurtosis extrêmement élevé n'est donc pas surprenant. De plus, ces résultats expliquent la fréquence extraordinaire de ces périodes de forte volatilité supposées extrêmement rares. Bien qu'un peu plus bas, le kurtosis des autres échantillons (l'échantillon sans les périodes de crise y compris) reste trop élevé que pour pouvoir qualifier la distribution de normale. Vérifions maintenant cela à l'aide d'un histogramme réalisé à partir de l'échantillon complet du S&P 500 en le comparant à un histogramme réalisé sur base d'un échantillon de variable aléatoire suivant une loi normale généré par Excel ainsi qu'à l'historgramme de l'échantillon créé à partir du mouvement brownien géométrique :

**Figure 21 : histogramme S&P 500 1980-2020**



**Figure 22 : Histogramme échantillon variables aléatoires normales**



**Figure 23 : Histogramme échantillon GBM**

La différence est frappante : la distribution des données normales forme effectivement une courbe en cloche parfaite, alors que celle du S&P 500 est beaucoup plus fine tout en montrant tout de même des valeurs extrêmes fort éloignées de la moyenne, même si ces dernières ont une probabilité minime et sont donc à peine visibles sur le graphique.

Maintenant qu'en est-il du coefficient d'asymétrie ? Les résultats sont quelque peu différents. Effectivement, bien que différent de zéro dans tous les échantillons, la skewness des échantillons de la bulle internet, de la crise des subprimes et de la crise du Covid-19 ne montre pas une différence significative par rapport à la skewness d'une distribution normale étant donné leur rapport avec leur erreur-type. Malgré ces exceptions, la distribution du S&P 500 a tout de même une tendance à être désaxée vers la gauche (cf. figure 21). On retrouve donc une plus grosse portion des données dans la queue de distribution droite, mais la queue de distribution gauche contient des données plus extrêmes. D'un point de vue financier, cela peut être interprété de la manière suivante : un investisseur peut s'attendre à fréquemment recevoir de petits gains et de temps en temps subir de fortes pertes. Ceci, à nouveau, semble correspondre à la réalité des marchés financiers, qui montrent des tendances à la hausse accompagnées de chutes de cours temporaires mais relativement violentes.

### **3.3 Test de normalité**

Finalement, j'analyse une dernière fois la distribution des rendements du S&P 500 à l'aide de tests de normalités. Ces tests de normalités sont régulièrement utilisés en statistiques, ils utilisent des fonctions de répartition  $F(x)$  basées sur les données à analyser et  $F_0(X)$  la fonction de répartition de la loi normale. Les hypothèses posées sont alors :

- $H_0 : F(x) = F_0(X)$
- $H_0 : F(x) \neq F_0(X)$

Les échantillons analysés sont les mêmes que pour l'analyse du kurtosis et de la skewness, les tests sont donc réalisés sur plusieurs laps de temps montrant des caractéristiques différentes afin de rendre l'analyse la plus représentative possible. Tous les tests sont effectués sur les retours logarithmiques en choisissant un niveau de significativité  $\alpha$  (alpha) de 0,05 (=risque consenti de rejeter à tort l'hypothèse  $H_0$ ).

#### **3.3.1 Test de Jarque-Barre**

Le premier test que je réalise est le test de normalité de Jarque-Barre (1980) qui utilise les valeurs de kurtosis et de skewness calculées au point précédent. On pose donc les hypothèses suivantes :

- Hypothèse nulle  $H_0$  : la distribution suit une loi normale.
- $H_1$  : la distribution ne suit pas une loi normale.

Le test utilise la formule ci-dessous (« Skewness & Kurtosis Analysis | Real Statistics Using Excel », 2017) :

$$JB = n \left( \frac{skew^2}{6} + \frac{(kurt-3)^2}{24} \right)$$

Avec :

- $n$  = le nombre d'observations ;
- kurt, le coefficient de kurtosis ;
- skew, le coefficient d'asymétrie.

Étant donné le fait qu'une distribution normale est censée avoir un kurtosis de 3 et une skewness de 0, le test devrait, afin d'accepter  $H_0$ , se rapprocher de 0.

On a donc :

$H_0 : skew = 0$  et  $kurt = 0$

$H_1 : skew \neq 0$  et  $kurt \neq 0$

Les résultats obtenus sont :



**Tableau 4 : résultats test de Jarque-Barre**

Période	Test de J-Barre				
	Statistique		P-value		Normale?
1980-2020	J-B	296733,2429	Pr>J-B	<0,0000000000001	Non
Black Monday 1987	J-B	176,40512	Pr>J-B	4,94441E-39	Non
Bulle internet	J-B	51,49681338	Pr>J-B	6,57066E-12	Non
Crise des Subprimes	J-B	637,1774465	Pr>J-B	4,351866E-139	Non
Crise du Covid19	J-B	22,18267612	Pr>J-B	1,52437945E-05	Non
1980-2020 sans crises	J-B	4372,951079	Pr>J-B	<0,000000000000001	Non

Les valeurs obtenues, pour tous les échantillons, sont significativement supérieures à zéro. En se basant sur ce test de Jarque-Barre, étant donné que toutes les p-valeurs sont inférieures à l'alpha choisi (0,05), on est en mesure de rejeter l'hypothèse nulle  $H_0$  selon laquelle la distribution suit une loi normale.

### 3.3.2 Test de Shapiro-Wilk

Le second test que j'effectue est le test de Shapiro-Wilk (1965). Cependant, ce test n'est utilisable que pour les échantillons allant de 3 à 50 éléments. Bien qu'il existe une version permettant d'analyser jusqu'à 5000 valeurs, c'est malheureusement toujours insuffisant pour analyser certains de mes échantillons (S&P 500 1980-2020 avec et sans crises). Voici cependant les résultats pour les autres échantillons :

**Tableau 5 : résultats test de Shapiro-Wilk**

Période	Test de Shapiro-Wilk				
	Statistique		P-value		Normale?
Black Monday (1987)	W	0,76107	Pr>W	<0,0001	Non
Subprime crisis	W	0,906667	Pr>W	<0,0001	Non
Internet bubble	W	0,986104	Pr>W	<0,0001	Non
Covid19 crisis	W	0,954067	Pr>W	0,0059	Non

Les résultats sont les mêmes que pour le test de Jarque-Barre. Aucun des échantillons étudiés ne montre une p-valeur supérieure à 0,05, aucune des distributions étudiées ne peut donc être qualifiée de distribution normale.

### 3.3.3 Autres tests

Bien entendu, les échantillons qui m'intéressent particulièrement sont les échantillons du S&P 500 avec et sans crises, c'est pourquoi il est intéressant de regarder les résultats de trois autres tests pouvant être réalisés sur tous les échantillons :

- Test de Kolmogorov-Smirnov (1954), un test fort connu lui aussi ;
- Test de Cramer-von Mises (1928) ;
- Test d'Anderson-Darling (1954).

À nouveau, j'utilise un intervalle de confiance de 95% (donc un  $\alpha$  de 0,05). Si la p-valeur des tests est supérieure à 0,05, on ne rejette pas l'hypothèse nulle et on qualifie la distribution de normale. Si elle est inférieure à 0,05, on rejettera l'hypothèse nulle et la distribution sera considérée non-normale. Les résultats par échantillons sont :

a) S&P 500 1980 – 2020 : échantillon complet

Tests de normalité				
Test	Statistique		P-value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.087398	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	32.90321	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	185.8285	Pr > A-Sq	<0.0050

**Tableau 6 : résultats tests échantillon complet**

b) Black Monday 1987

Tests de normalité				
Test	Statistique		P-value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.215646	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	0.326084	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	1.933765	Pr > A-Sq	<0.0050

**Tableau 7 : résultats tests échantillon Black Monday**

c) Bulle internet (2000-2002)

Tests de normalité				
Test	Statistique		P-value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.043233	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	0.266501	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	1.780307	Pr > A-Sq	<0.0050

**Tableau 8 : résultats tests bulle internet**

d) Crise des subprimes (2007-2009)

Tests de normalité				
Test	Statistique		P-value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.11178	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	2.493791	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	13.43576	Pr > A-Sq	<0.0050

**Tableau 9 : résultats tests échantillon subprimes**

e) Crise du Covid-19 (2020)

Tests de normalité				
Test	Statistique		P-value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.102531	Pr > D	0.0372
Cramer-von Mises	W-Sq	0.179086	Pr > W-Sq	0.0095
Anderson-Darling	A-Sq	1.071907	Pr > A-Sq	0.0081

**Tableau 10 : résultats tests échantillon covid**

f) S&P 500 1980 – 2020 sans les périodes de crises

Tests de normalité				
Test	Statistique		P-value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.39597	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	313.9642	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	1513.789	Pr > A-Sq	<0.0050

**Tableau 11 : résultats tests échantillon sans crise**

g) À titre comparatif : voici les résultats tirés de l'échantillon de variables aléatoires suivant une distribution normale créé sur Excel

Tests de normalité				
Test	Statistique		P-value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.005989	Pr > D	>0.1500
Cramer-von Mises	W-Sq	0.038346	Pr > W-Sq	>0.2500
Anderson-Darling	A-Sq	0.327927	Pr > A-Sq	>0.2500

**Tableau 12 : résultats tests échantillon normal**

Comme vous pouvez le constater, tous les tests, sans aucune exception, et pour tous les échantillons (y compris l'échantillon où les périodes de crise ont été retirées), donnent une p-valeur significativement inférieure à 0,05.

Tous les tests et échantillons rejettent donc l'hypothèse de distribution gaussienne.

## Chapitre 4 : Les lois de puissance : une vision stochastique des marchés

### **4.1 So what ?**

C'est une chose que de remettre en question le paradigme classique, mais encore faut-il pouvoir lui trouver une alternative. En effet, bon nombre de praticiens sont conscients des incohérences du modèle néoclassique, mais contre-argumentent tout simplement en expliquant que les hypothèses de normalité, d'indépendance des variables et autres ne sont que des hypothèses ayant pour but de simplifier les mathématiques de la finance moderne. Pour eux, ce qui importe ce sont les résultats. À partir du moment où le modèle classique permet à un économiste d'expliquer les fluctuations du marché, à un gestionnaire de bien diversifier ses portefeuilles, ou encore à un analyste de prendre les bonnes décisions, où est le problème ? Effectivement, si en réalité tout fonctionnait, il n'y aurait pas de problème. Mais est-ce vraiment le cas ?

#### **4.1.1 Long-Term Capital Management LP**

Le monde est rempli d'ironie, et l'une d'entre elle est le fait qu'un exemple de la redécouverte des lacunes majeures du modèle classique se produit aux frais de deux auteurs fondateurs de cette même théorie classique : Myron Scholes et Robert C. Merton ; tous deux gagnants du prix Nobel d'économie grâce à leurs travaux sur l'évaluation d'option, réalisés aux côtés de Fisher Black (et présentés précédemment dans ce mémoire).

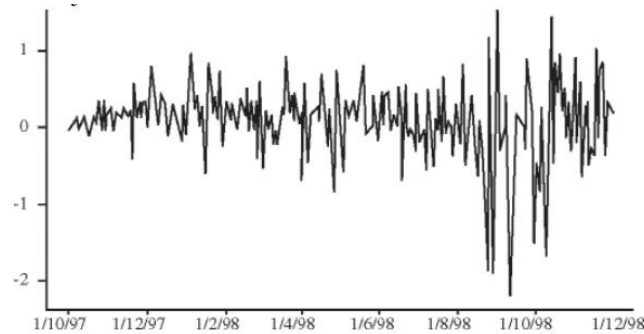
Ces deux économistes, aux côtés de plusieurs traders de Wall Street de renommée mondiale, fondent en 1993 un nouveau fonds d'investissement appelé Long-Term Capital Management LP. Leur stratégie était simple ; rechercher à l'aide de leur formule d'évaluation des options mal évaluées et parier sur le fait que le marché corrige éventuellement leur prix ; mais fort agressive : le fonds avait un ratio de la dette de 50 sur 1.

Les gestionnaires choisis pour prendre les décisions étaient pourtant les meilleurs du marché. Sharpe lui-même dit à l'époque dans le Wall Street Journal que LTCM avait probablement le meilleur département financier mondial d'un point de vue académique. Tout cela rendit le fonds extrêmement attirant et il prit énormément d'ampleur dès sa création, en soulevant jusqu'à \$7 milliards.

LTCM commença avec des années très fructueuses, avec un profit de 42,8% en 1995 et 40,8% en 1996. Tout allait donc bien, jusqu'à ce que les marchés deviennent plus agités en 1998. Alors que la tension monte dans le monde, les obligations souveraines commencent à se comporter d'une manière que le modèle purement académique n'avait

pas prévu. Cette descente continua et en août 1998, le gouvernement russe se retrouve en défaut sur ses obligations. Mais ce n'est pas tout, contrairement aux prévisions, une grande majorité des autres actifs détenus par le fonds commencèrent à chuter également, suivant la tendance des obligations et allant à l'encontre de l'hypothèse d'indépendance des fluctuations de prix. Le graphique ci-dessous montre la volatilité des gains et pertes journaliers de quatre banques majeures, poussée par le défaut de la dette souveraine russe. (Mandelbrot et Hudson, 2006)

**Figure 24:** daily profits and losses of four of the biggest banks



Source: Mandelbrot, B., & Hudson, R. L. (2006). *The Misbehaviour of Markets: A Fractal View of Financial Turbulence* (annotated edition, p.108). New York, United States : Basic Books.

Le fonds fut finalement racheté \$3,625 milliards par plusieurs banques dans un bail out ordonné par le conseil de la Réserve fédérale, qui craignait une vague de faillites si le fonds venait à couler. Certains partenaires, comme John Meriwether, reportèrent de cette situation de crise en ayant appris une leçon importante, qu'il partage dans le Wall Street Journal en 2000, deux ans après :

« Our whole approach was fundamentally flawed... With globalization increasing, you'll see more crisis. Our whole focus is on the extreme now – what's the worst that can happen to you in any situation – because we never want to go through that again.» (cité par Mandelbrot et Hudson, 2006, p. 108).

Bien sûr ceci n'est qu'un fonds parmi tant d'autres, mais je trouvais que c'était le meilleur exemple pour faire comprendre que la sécurité qu'offre le modèle classique durant les périodes calmes est toujours accompagnée d'un désavantage conséquent : le fait de n'être absolument pas protégé lorsque les marchés deviennent un tant soit peu turbulents.

## **4.2 Les lois de puissance**

### **4.2.1 Pourquoi les lois de puissance ?**

Afin d'introduire ce concept de loi de puissance, il est important de comprendre l'intérêt d'adopter un modèle permettant de prendre en compte les événements extrêmes dans la mesure du risque. Une phrase, écrite par Jean-Pierre Dupuy dans son ouvrage « penser les événements extrêmes », a attiré mon attention :

« Le champ de ce qui n'est pas avéré est évidemment sans limites » (Dupuy, 2010, p. 10)

Dans tous les secteurs, des évènements peuvent avoir une probabilité d'occurrence tellement minime qu'ils ne sont tous simplement pas pris en compte tant qu'ils ne se produisent pas une fois, et ce malgré l'impact colossal qu'ils pourraient avoir (concept des Black Swan). Il n'est pas avéré que le vaccin contre la rougeole ne donne pas la coqueluche, il n'est pas avéré que la 5G ne soit nuisible pour la nature, ou encore, il n'est pas avéré que l'état des bilans des banques centrales, abîmés par les rachats massifs d'actifs publics, ou encore l'immense dette publique de certains états, puisse pousser le monde dans une nouvelle crise financière et une récession pire que celles que nous avons connues jusqu'à présent. Le problème que nous rencontrons est que nous nous concentrons uniquement sur la rareté de ces phénomènes extrêmes, et non pas sur l'énormité des enjeux qui les accompagnent. Ces risques ne sont certes pas des risques certains ni avérés, mais ce sont tout de même des risques dont nous devons tenir compte, et ce à travers ces deux notions : leur amplitude et leur rareté.

Il reste maintenant à trouver quel outil statistique utiliser afin de les mesurer. Comme expliqué dans le chapitre précédent, les évènements que nous cherchons à analyser sont des évènements aléatoires, nous allons donc utiliser une distribution de probabilité. Nous connaissons déjà la distribution gaussienne, courbe en cloche rassurante, mais qui ne répond pas à notre critère puisqu'elle ne représente qu'un « faux hasard » en ne prenant pas ou peu compte des valeurs extrêmes, la loi normale est en fait un ordre caché derrière un désordre apparent.

Il est alors intéressant de se tourner vers une distribution utilisée dans de nombreuses disciplines où la mesure d'évènements extrêmes fait partie de la routine quotidienne, entre autres : l'étude des cyclones dans les Caraïbes, des éruptions volcaniques et des tsunamis sur les côtes pacifiques, et également de la création des bulles financières. Cette distribution est la distribution en loi de puissance.

#### 4.2.2 Loi de puissance

Avant d'en présenter l'origine et les applications qu'en ont fait les différents économistes, il est important de présenter la loi de puissance, sa représentation graphique et ses caractéristiques.

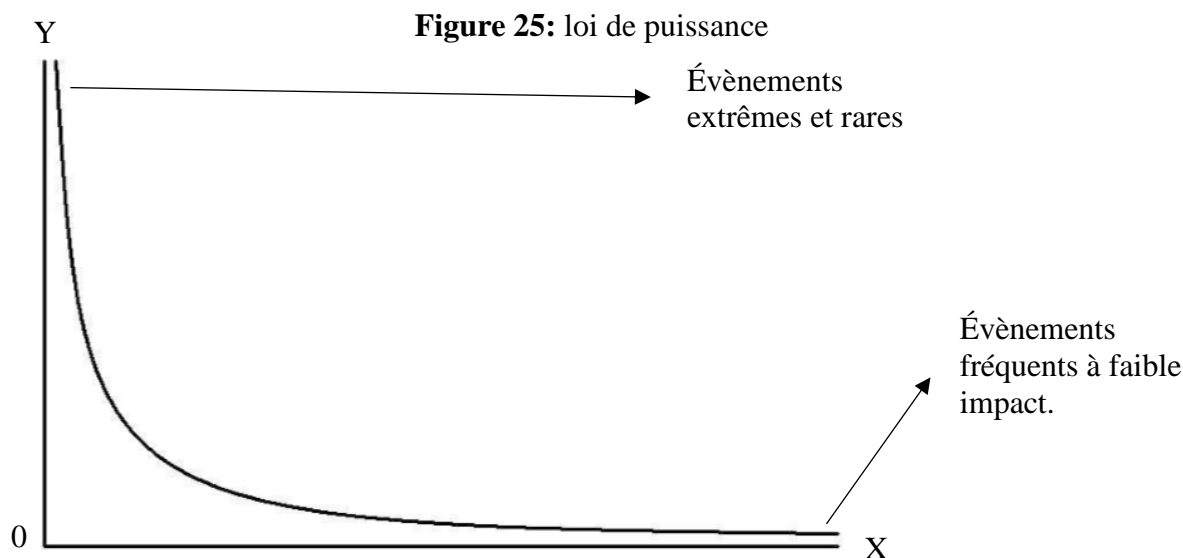
Une loi de puissance montre que la relation mathématique entre deux variables est de la forme :

$$Y = ax^{-k}$$

Avec

- $k < 0$  ;
- $k$  est une constante positive et un exposant d'échelle, puissance ou indice ;
- $a$  est une constante de proportionnalité ;
- $y$  est fonction de  $x$  ;
- Si  $k \leq 1$  : la moyenne n'existe pas ;
- Si  $k \leq 2$  : la variance n'existe pas.

Sa représentation graphique est la suivante :



Source : Herlin, P. (2012). *La remise en cause du modèle classique de la finance par Benoît Mandelbrot et la nécessité d'intégrer les lois de puissance dans la compréhension des phénomènes économiques* (thèse de doctorat). Conservatoire national des arts et métiers, Paris. Récupéré de <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00787464>

La loi de puissance est donc une relation mathématique non-linéaire où la fréquence d'occurrence d'un événement d'une certaine taille est inversement proportionnelle à une certaine puissance  $n$  de ladite taille. On observe ici une distribution beaucoup plus étalée que la courbe en cloche de la loi normale. Les lois de puissances sont une simple relation mathématique qui survient fréquemment dans la nature. L'aire d'un champ carré augmente par la puissance carrée de ses côtés : si les côtés triplent, l'aire est multipliée par 9. La gravité suit également une distribution similaire ; si un vaisseau qui s'écarte de la terre double la distance qui le sépare de celle-ci, la traction gravitationnelle diminue au quart de sa valeur initiale.

Son interprétation par rapport à des événements économiques est relativement intuitive, l'axe X représente l'amplitude, l'impact d'un phénomène alors que l'axe Y représente sa fréquence. Les premières valeurs de Y sont très élevées mais diminuent très rapidement, ce qui montre la haute fréquence des phénomènes à faible impact, dans notre cas des petites variations de cours. À l'autre extrémité, les événements extrêmes (chute ou montée brusque du cours d'un titre) ont une probabilité d'occurrence faible, bien que déjà fortement supérieure à celle que leur accorde la loi normale. Plus un événement aurait un impact important, plus sa rareté est élevée et vice-versa. À travers cette distribution, il est donc aisé de mesurer le risque d'un événement à travers son poids, qui est le produit de son amplitude et de sa rareté. Un événement majeur avec une probabilité faible, mais tout de même non-négligeable, aura alors un poids relativement lourd.

Finalement, un attribut majeur des lois de puissance est **l'invariance d'échelle**.

Soit une relation :

$$f(x) = ax^k$$

Pour tout changement de la variable  $x$  par une constante  $c$  (pour tout changement d'échelle), la fonction est simplement multipliée par un coefficient  $c^k$ .

$$F(cx) = a(cx)^k = ac^k x^k = c^k f(x)$$

Des invariances d'échelle se définissent comme suit : « des propriétés statistiques qui ne dépendent pas de la fréquence d'échantillonnage. » (Cont, 2012, p. 3).

Ainsi, toutes les lois de puissance d'exposant égal sont équivalentes à un facteur constant  $c^k$  près. Le terme technique de ce changement d'échelle est une dilatation. Ce principe d'invariance d'échelle est très important puisqu'il est la raison pour laquelle on peut représenter les fractales à travers une distribution en loi de puissance, comme je vais l'expliquer plus tard.

Mathématiquement, une loi de puissance telle quelle ne peut pas être une distribution de probabilité. On considère alors une distribution tronquée de la forme suivante :

$$P(x) = Cx^{-\alpha}$$

Pour  $x > x_{\min}$  ;

Avec  $C = \text{constante}$  pour que l'aire totale soit égale à 1.

Où l'exposant  $\alpha$  (alpha, différent du coefficient d'échelle) se retrouve de manière générale dans la plage  $2 < \alpha < 3$  et est supérieur à 1, afin d'éviter que la queue de distribution n'ait une aire infinie. En pratique, les lois de puissance ne s'appliquent pas pour toutes les valeurs de  $x$ . Il est alors nécessaire que  $x$  soit supérieur à une valeur  $x_{\min}$  afin d'éviter que la distribution n'ait une aire infinie lorsque  $x$  se rapproche de 0. C'est pourquoi on dit souvent que les **queues d'une distribution** suivent une loi de puissance (Clauset et al., 2009).

#### 4.2.3 L'utilisation des lois de puissance : une vision stochastique

L'utilisation des lois de puissance en finance pose les bases pour ce qui deviendra « les finances modernes », dont l'objectif n'est plus de déterminer le prix d'équilibre/la valeur fondamentale, mais bien de prédire les mouvements de ce prix en utilisant les mathématiques de la chance et les statistiques, le risque en devient ainsi mesurable et gérable.

Pourquoi ce changement ? Pourquoi parler de chance en finance ?

Depuis environ un siècle, la finance a introduit le concept de hasard dans ses modèles. Ce hasard peut également être apparenté à la « chance », la chance de gagner, ou la



chance de perdre. La représentation du hasard par la loi normale ne permet cependant que de légères fluctuations autour de la moyenne, à moins de regarder des probabilités extrêmement minimes. Ainsi, les stratégies de gestion de portefeuille et autre ont toujours pris une approche plus **déterministe**, en cherchant à fonder des décisions sur une analyse des relations de cause à effet. Amazon a annoncé des résultats positifs, donc le cours de ses actions va augmenter. Ces relations de cause à effet sont en général aisément déterminées a **posteriori** et donnent un sens aux fluctuations. Et effectivement, un analyste pourrait prédire les cours de bourses s'il avait à sa disposition le bon matériel, les bonnes données au bon moment, etc. Cependant, rares sont les situations où tout ceci est à sa disposition. Les informations peuvent être erronées, les données peuvent être biaisées, certains facteurs tels l'anticipation des investisseurs et les mouvements de masses sont difficilement quantifiables...bref, les marchés sont peut-être moins efficaces que ce que le laisse paraître l'orthodoxie financière. Ainsi, aucun analyste, dans les conditions actuelles, n'est dans la capacité de prédire l'impact d'un événement au moment où celui-ci commence à se produire.

Il est donc peut-être plus sage de prendre une vision stochastique plutôt que déterministe. Ainsi, de la même manière qu'il est impossible pour les chimistes de déterminer la trajectoire exacte de chaque molécule constituant un gaz, le monde financier est trop incertain que pour nous permettre de calculer la valeur fondamentale d'un actif, Mandelbrot nous invite alors à utiliser les probabilités afin d'estimer les fluctuations les plus probables des cours de bourses, il nous invite à estimer la probabilité pour et contre la montée du cours d'un titre. Attention, cela ne revient pas à dire que les mouvements de prix sont irrationnels ou hasardeux, mais bien à accepter qu'ils soient imprévisibles.

#### **4.3 Vilfredo Pareto : la distribution des patrimoines**

Les lois de puissances ne sont pas un nouveau concept en finance. En effet, le concept de cette distribution fut introduit au début du 20<sup>ème</sup> siècle par le sociologue et économiste Vilfredo Pareto dans une étude qu'il réalise sur la répartition des revenus dans plusieurs pays et à travers différentes époques. Il constate alors que cette distribution est similaire dans une grande majorité des échantillons : 20% des familles possèdent 80% des terres agricoles. Cette constatation va créer la « règle des 20/80 », ou « principe de Pareto », un principe valable dans une multitude de cas de figure, que ceux-ci soient d'origine humaine ou naturelle (taille des entreprises dans un secteur, contribution des produits d'une entreprise au chiffre d'affaires, fréquence d'occurrence de tremblement de terre par endroit...), le principe est alors : de manière générale : 20% des causes provoquent 80% des effets (Herlin, 2012). À la suite de cette étude, il émet la conclusion suivante : « cette distribution était telle que la moyenne des revenus supérieurs à un revenu donné était dans un rapport constant avec le revenu en question. » (Dupuy, 2010, p. 11). Ce rapport est donné par un facteur  $k$  et s'interprète de manière très intuitive. Prenons par exemple une distribution qui donne un rapport de 1,5

pour le revenu d'un chômeur, cela veut dire que la moyenne des revenus supérieurs aux revenus de ce chômeur est 1,5 fois supérieure à son revenu. Cette conclusion peut être généralisée à l'explication d'une majorité des distributions possibles et imaginables : la moyenne des valeurs supérieures à une valeur spécifique est en rapport constant avec cette dernière.

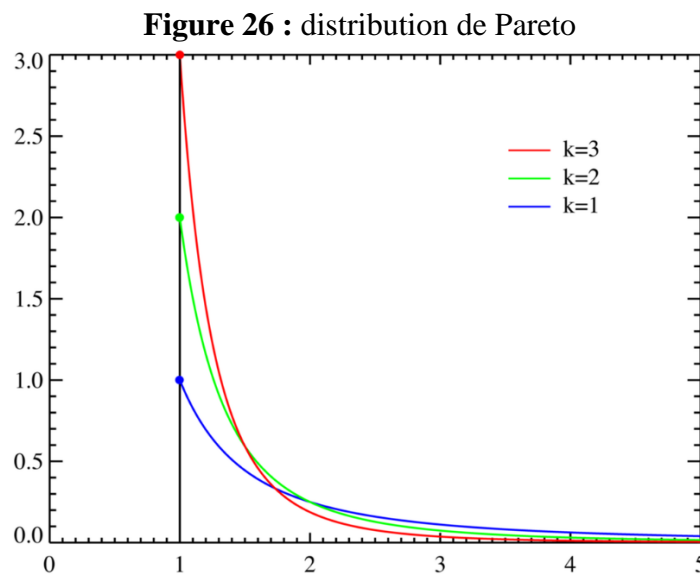
Pareto introduit alors la première loi de puissance sous la forme de ce qui deviendra la distribution de Pareto (Herlin, 2012) :

$$P(X > x) = \left(\frac{x}{x^{\min}}\right)^{-k} \text{ ou } 1 - \left(\frac{x^{\min}}{x}\right)^k$$

Avec :

- $x^{\min}$  = valeur minimale de la variable  $x$  ;
- $k$  est une constante positive et un exposant d'échelle ;
- Si  $k \leq 1$  : la moyenne n'existe pas ;
- Si  $k \leq 2$  : la variance n'existe pas.

Sa représentation graphique est :



Source : File : Pareto distributionPDF.png. (s. d.). Consulté le 25 juin 2020, à l'adresse [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pareto\\_distributionPDF.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pareto_distributionPDF.png)

Les deux dernières caractéristiques de la distribution relatives à l'existence ou non de la moyenne et de la variance m'ont quelque peu choquées lors de ma première lecture de la littérature. Comment deux concepts aussi ancrés dans la finance et dans nos esprits tels que la moyenne et la variance peuvent-ils ne pas exister ? La réponse est pourtant très logique : à partir de ces deux niveaux de  $k$ , la répartition des variables est tellement inégalitaire que ces deux mesures perdent leur sens. Lorsqu'une part considérable de la variance et de la moyenne est déterminée par un nombre infime de changements de prix extrêmes, y a-t-il réellement un intérêt à son utilisation ? Cela peut également se vérifier à travers leur formule respective.

Rappelons-le, les formules de moyenne et de variance pour une distribution de Pareto sont :

$$\mu = \frac{k x_m}{k-1}$$

$$\sigma = \frac{x_m^2 k}{(k-1)^2 (k-2)}$$

Avec :  $x_m = x_{\min}$

Si  $k$  est plus petit que 1 ou 2 respectivement pour le calcul de la moyenne et de la variance, le dénominateur de chaque formule serait égal à zéro, la moyenne et les variances seraient alors toutes les deux égales à l'infini.

Pareto ne s'arrêta pas là, il se demanda pourquoi cette distribution, qu'il avait découverte en réalisant une étude assez ciblée, concentrée sur un secteur particulier (distribution des revenus), se rencontrait presque partout, et trouva la logique derrière cette constatation. Afin de la comprendre, prenons un exemple :

Imaginons 1000 jetons tombant uniformément sur une région quelconque, où les habitants ont préparé 100 coupes afin de les recueillir. Si l'on émet l'hypothèse que les jetons tombent de manière indépendante les uns des autres, les jetons seront distribués en suivant une loi normale. La plupart des coupes contiendront alors un nombre de jetons peu éloigné de la moyenne (10 jetons) et seul un nombre restreint contiendront un nombre extrême (petit ou grand) de jetons.

Émettons maintenant une hypothèse différente à celle posée précédemment, en supposant que la probabilité qu'une coupe attire des jetons augmente en fonction du nombre de jeton qu'elle possède déjà. On a alors affaire à un mécanisme d'autorenforcement qui change totalement la distribution obtenue. Les valeurs extrêmes y seront beaucoup plus présentes et beaucoup moins de coupes contiendront un nombre de jetons proche de la moyenne. Cet exemple, à lui seul, explique parfaitement la distribution de Pareto :

« Plus on est riche, plus on a de chance de le devenir encore davantage » (Dupuy, 2010, p. 11).

#### 4.3.1 Comment le phénomène d'autorenforcement pousse à la spéculation

Le principe de la distribution de Pareto montre un phénomène d'autorenforcement qui peut aisément être associé avec la logique des marchés financiers. Ce phénomène, à lui seul, remet en cause la vision gaussienne des marchés puisqu'il démontre l'invalidité de l'hypothèse d'indépendance des variables.

Pour comprendre cela, prenons à nouveau un exemple. Imaginons que nous nous trouvons en voiture, et que nous devons choisir entre plusieurs routes de taille différentes, certaines sont des autoroutes de plusieurs milliers de kilomètres, alors que d'autres s'arrêtent après quelques centaines de kilomètres. Il nous est impossible de voir leur longueur à cause d'un brouillard épais qui nous empêche de distinguer la route à

plus d'un kilomètre. Nous devons donc nous engager sur une de ces routes à l'aveugle. Au plus le temps passe sans apercevoir la fin de la route, au plus le conducteur aura de raisons de croire que la route qu'il a choisie est une autoroute de plusieurs milliers de kilomètres, il va donc penser que la route qu'il lui reste à faire est de plus en plus longue et le choc sera d'autant plus brutal une fois qu'il en apercevra la fin. Le terme arrivera pourtant inéluctablement, et c'est au moment où le conducteur sera sur le point d'apercevoir la fin de la route, qu'il pensera avoir encore le plus de trajet à accomplir.

Adaptons maintenant cet exemple à un phénomène financier qui est souvent la cause d'événements extrêmes : les bulles financières. Lorsqu'une bulle enfle, poussée par la spéculation des investisseurs, elle renforce le sentiment d'optimisme des acteurs qui croient que le cours va continuer de monter, puisqu'elle confirme leurs attentes. L'optimisme des acteurs continue alors à augmenter jusqu'à atteindre son apogée au moment où la bulle est sur le point d'éclater (Dupuy, 2010).

Ce phénomène d'autorenforcement peut être expliqué par la notion de réflexivité, introduite par George Soros (2010), qui explique que les interférences entre la fonction cognitive et participative des acteurs les poussent à émettre des jugements de valeur, qui prennent la forme de courbe de rétroaction : les opinions des acteurs influencent le cours des événements, qui à leur tour influencent l'opinion des acteurs, et ainsi de suite. Cette théorie qui explique la cause de la création des bulles à travers la spéculation peine cependant encore à dicter le comportement à adopter afin de la contrer. En effet, s'il est aisé de remarquer ce type de comportement a posteriori, savoir comment se comporter face à ce que Mandelbrot appelle le « hasard sauvage » est une toute autre affaire. Jean-Pierre Dupuy, de son côté, invite les praticiens à se montrer catastrophistes et à se tenir sur leurs gardes lorsque les raisons objectives d'être optimistes s'amassent. Je m'égare cependant quelque peu du sujet puisque celui-ci a trait à la finance comportementale et à la philosophie analytique plus qu'à la finance, je ne développerai donc pas davantage ce point.

#### **4.4 Les rendements boursiers : une distribution en loi de puissance ?**

##### **4.4.1 Données analysées**

Dans le chapitre précédent, j'ai effectué une multitude de tests afin de vérifier si les rendements boursiers suivent une distribution normale et j'ai découvert que les résultats de tous mes tests contredisent cette hypothèse émise par Bachelier et l'école classique. Il faut cependant trouver une alternative à cette hypothèse de normalité des rendements, c'est pourquoi j'ai présenté les lois de puissance. Encore faut-il cependant démontrer que celles-ci peuvent être utilisées pour expliquer et modéliser des cours boursiers.

Dans ce chapitre, je teste cette hypothèse sur les mêmes échantillons que j'ai utilisés précédemment, c'est-à-dire :

Données journalières du S&P 500 aux dates suivantes :

- a) 11 juin 1980 – 10 juin 2020 ;

- b) 19 octobre 1987 – 30 novembre 1987 : période du Black Monday de 1987 ;
- c) 3 avril 2000 – 1 octobre 2002 : période de la bulle internet ;
- d) 19 février 2007 – 12 mars 2009 : période de la crise des subprimes ;
- e) 18 février 2020 – 10 juin 2020 : période de la crise du Covid-19 ;
- f) 1980-2020 – b – c – d – e : échantillon de base moins les périodes de forte volatilité.

De la même manière que les variables aléatoires, une loi de puissance peut prendre deux formes distinctes : continue ou discrète. Une distribution en loi de puissance continue est utilisée lorsqu'on travaille avec des nombres réels continus **positifs** et une distribution en loi de puissance discrète n'est applicable que lorsqu'on travaille avec un ensemble de valeurs discrètes, typiquement des **nombres entiers positifs**.

Les log-returns étudiés précédemment ne sont cependant pas tous positifs, puisque certaines variations journalières sont négatives. À la place, j'ai donc choisi d'étudier les ratios, c'est-à-dire le prix en T divisé par le prix en T-1. Ces ratios varient autour de 1 et sont strictement positifs tout en donnant une représentation tout aussi significative statistiquement des rendements journaliers que les rendements logarithmiques. Ces ratios ne sont cependant pas des nombres entiers, je dois donc considérer une distribution en loi de puissance continue.

#### 4.4.2 Méthodologie

Contrairement aux tests de normalité qui sont relativement accessibles et fort répandus dans la littérature, il est plus compliqué de reconnaître une loi de puissance. En pratique, il est très rare, voire impossible, de démontrer avec certitude qu'un échantillon provient d'une distribution en loi de puissance. Je vais cependant aller le plus loin possible au vu de mes connaissances et tenter de démontrer que l'hypothèse selon laquelle mes échantillons sont tirés d'une distribution de la forme  $p(x) = Cx^{-\alpha}$  est cohérente.

Pour ce faire, j'utilise le logiciel de programmation R et je suis la méthodologie suivante, proposée par Clauset et al. (2009), M.E.J. Newman (2005) et Vuong (2009) :

- 1) Premièrement, j'estime les paramètres  $x_{\min}$  et  $\alpha$  du modèle de loi de puissance à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance (maximum likelihood method).
- 2) Ensuite, j'effectue un test de goodness-of-fit entre mes données et une distribution en loi de puissance, afin d'analyser si la distribution en loi de puissance peut modéliser ma série de données de façon plausible.
- 3) Finalement, je compare l'appariement de mes données avec la loi de puissance d'un côté et avec la loi normale de l'autre en utilisant un test ratio de vraisemblance (likelihood ratio).

À nouveau, j'utilise l'échantillon du S&P 500 entre 1980 et 2020 tiré du site du Wall Street Journal (s.d.).

### 4.4.3 Résultats

#### 4.4.3.1 Tester l'hypothèse de loi de puissance

Puisque toute suite de données peut être assimilée à une loi de puissance, il est important d'étudier si ladite loi est un bon appariement (match) pour mes données. Même si les données s'avèrent tirées d'une loi de puissance, il y a peu de chance que la distribution observée suive exactement la même forme de loi de puissance ; il y aura toujours quelques petites déviations dues à la nature aléatoire du processus d'échantillonnage. Ce que je vais donc essayer de faire est de distinguer les déviations dues à cette nature aléatoire et les déviations qui surviennent parce que les données sont tirées d'une distribution autre que la loi de puissance. Le test effectué sur R comprend plusieurs étapes :

##### a) Estimation des paramètres $x_{\min}$ et $\alpha$

La première étape est d'estimer les paramètres  $x_{\min}$  et  $\alpha$ . Trouver alpha lorsque  $x_{\min}$  est connu est relativement aisé, mais estimer  $x_{\min}$  est beaucoup moins évident. Effectivement, une fois  $x_{\min}$  déterminé,  $\alpha$  s'obtient en utilisant l'estimateur de maximum de vraisemblance (MLE : maximum likelihood estimator) dont la formule (pour un cas de variable continue) est présentée ci-dessous (Clauset et al., 2009) :

$$\hat{\alpha} = 1 + n \left[ \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{x_{\min}} \right]^{-1}$$

Pour ce faire, j'utilise le test de Kolmogorov-Smirnoff (KS) que j'ai utilisé précédemment afin de trouver la valeur  $x_{\min}$  qui **minimise** la valeur du test de KS. Afin de trouver cette valeur, le logiciel parcourt mes données et utilise chacune d'entre elles comme potentielle  $x_{\min}$ . Il tronque alors l'échantillon afin qu'il inclue uniquement la valeur  $x_{\min}$  et toutes les données au-dessus, utilise la suite de valeurs obtenues afin de créer un cdf (fonction de distribution cumulative) empirique et le compare avec le cdf théorique créé à partir de la fonction suivante :  $p(x) = (x/x_{\min})^{-\alpha+1}$  où  $x$  est mon échantillon. Il prend ensuite le maximum de la valeur absolue de la différence entre chaque valeur du cdf théorique et empirique, et obtient un résultat qui est la statistique de KS. Il répète alors cette opération en considérant chaque valeur comme étant  $x_{\min}$ , trouve la statistique de KS qui a la plus petite valeur et considère le  $x_{\min}$  correspondant comme étant la valeur  $x_{\min}$  de l'échantillon (Lai, 2020).

Avant de passer à la prochaine étape de mon analyse, il est important de noter une chose : une faible valeur du test de Kolmogorov-Smirnoff indique que la distribution théorique est bien adaptée à la suite de données étudiée. En choisissant les paramètres  $x_{\min}$  et  $\alpha$  qui minimisent cette valeur de KS, j'analyse donc la plausibilité de la distribution en loi de puissance en **situation optimale**. L'idée ici est de forcer l'algorithme à trouver les valeurs des paramètres  $x_{\min}$  et  $\alpha$  qui permettent d'aligner au mieux la loi de puissance aux données. Il faut donc que je garde cela en tête lorsque j'analyse mes résultats. Les différents paramètres obtenus sont présentés dans le tableau au point suivant.

## b) Goodness-of-fit test

Une fois les paramètres de mes différents échantillons déterminés, le test génère une p-valeur qui peut alors être utilisée pour quantifier la plausibilité de mon hypothèse. Ce genre de test mesure la « distance » entre la distribution empirique et le modèle théorique étudié (dans notre cas la loi de puissance).

Si la p-valeur est élevée, alors toute différence entre le set de données empirique et le modèle peut provenir de fluctuations statistiques et on peut considérer l'hypothèse que les rendements boursiers suivent une loi de puissance comme plausible. Cependant, si la p-valeur est proche de zéro, le modèle ne correspond pas aux données étudiées et une autre distribution serait plus appropriée.

Les hypothèses sont donc :

$H_0$  : Les données ne peuvent pas être générées à l'aide d'une distribution en loi de puissance.

$H_1$  : Les données peuvent être générées à l'aide d'une distribution en loi de puissance.

Comme pour les tests de normalités effectués précédemment, j'utilise ici un seuil de signification de 5%. Donc, si :

- P-valeur  $> 0,05$  : je rejette l'hypothèse nulle et je conclus que les données de mes échantillons auraient pu être tirées d'une distribution en loi de puissance ;
- P-valeur  $\leq 0,05$  : je conserve l'hypothèse nulle et je conclus que les données de mes échantillons n'auraient pas pu être tirées d'une distribution en loi de puissance.

Voici les résultats obtenus :

Période	Estimation des paramètres Xmin et $\alpha$ (alpha) + Goodness-of-fit test			
	Xmin	$\alpha$	Statistique KS	P-valeur KS
S&P 500 1980-2020	1,001525	142,1496	0,01651486	0,1719559
S&P 500 wo. crisis	1,006974	167,1363	0,01024558	0,9931874
Black Monday (1987)	0,9998792	42,94188	0,07077873	0,9999956
Subprime crisis	0,9969766	79,86633	0,06819928	0,09727529
Internet bubble	1,00496	108,5664	0,03143219	0,9863403
Covid19 crisis	1,003926	46,43256	0,07319721	0,9870254

**Tableau 13 : résultats goodness-of-fit**

La colonne qui m'intéresse particulièrement est la dernière, qui montre les p-valeurs des tests de Kolmogorov-Smirnoff effectués sur mes différents échantillons. Les tests aboutissent tous à une p-valeur supérieure à 0,05. Je rejette l'hypothèse nulle et je peux considérer comme plausible l'hypothèse que les rendements boursiers de mes échantillons suivent une distribution en loi de puissance.

c) Comparaison avec la loi normale : likelihood-ratio test

Dans le test précédent, j'ai déterminé que la distribution en loi de puissance était un appariement plausible à la distribution des rendements de mes échantillons. Ces résultats ne sont cependant pas suffisants pour déclarer avec certitude que la loi de puissance est la distribution la plus appropriée pour expliquer la distribution des rendements boursiers. Effectivement, bien qu'ils présentent une bonne compatibilité, il se peut que d'autres distributions correspondent tout aussi bien, voire mieux à mes échantillons. Afin de tester cela, j'ai donc réalisé un test de ratio de vraisemblance (ou likelihood-ratio test) proposé par Vuong (1989), à travers lequel je compare la compatibilité de mes données avec les deux distributions qui nous intéressent : la distribution en loi de puissance et la distribution normale, respectivement  $m_1$  et  $m_2$ .

Les deux hypothèses sont ici :

$H_0$  : les deux distributions représentent aussi bien la distribution étudiée.

$H_1$  : une des deux distributions est plus proche de la vraie distribution

Ce test me donne deux résultats : la p-valeur bilatérale et la p-valeur unilatérale (two-sided et one-sided p-value).

Premièrement, on regarde la p-valeur bilatérale, qui est indépendante de l'ordre dans lequel on compare les distributions (comparer  $m_1$  à  $m_2$  ou  $m_2$  à  $m_1$  donnera la même p-valeur). Celle-ci décide si on rejette ou non l'hypothèse nulle en analysant si une des deux distributions est plus adaptée que l'autre. À nouveau, si p-bilatérale  $> 0,05$  : je ne rejette pas l'hypothèse nulle, si p-bilatérale  $\leq 0,05$ , je la rejette et conclus qu'une des deux distributions est plus adaptée que l'autre.

Dans le cas où l'on rejette l'hypothèse nulle, il est alors intéressant de regarder quelle distribution est la plus adaptée. Pour ce faire, il suffit de regarder la p-valeur unilatérale, qui est dépendante de l'ordre, et de comparer  $m_1$  à  $m_2$ , puis  $m_2$  à  $m_1$ . Si pour un des échantillons la p-valeur unilatérale est supérieure à 0.05, cela suffit à dire que la seconde distribution dans la comparaison ( $m_2$  dans le cas de  $m_1$  vs  $m_2$ ) est plus adaptée à la suite de données.

Voici les résultats obtenus :

**Tableau 14 : résultats likelihood-ratio test**

Période	likelihood-ratio test		likelihood-ratio test	
	M1 vs M2		M2 vs M1	
	P one-sided	p two-sided	P one-sided	p two-sided
Black Monday (1987)	1	7,56E-28	0	0
Subprime crisis	1	0	0	0
Internet bubble	1	0	0	0
Covid19 crisis	1	2,62E-81	0	0
S&P 500 1980-2020	1	0	0	0
S&P 500 wo. crisis	1	0	0	0



On remarque tout d'abord que les p-valeur bilatérales de la comparaison  $m_1$  vs  $m_2$  sont soit égales à zéro, soit proches de zéro. Ils sont donc inférieurs à 0,05, ce qui me permet de rejeter l'hypothèse  $H_0$  et de conclure qu'un des deux modèles est plus proche de la distribution étudiée. Il me reste maintenant à déterminer si le modèle le plus performant est la loi normale ou la loi de puissance. Pour cela, comme expliqué précédemment, je regarde les p-valeurs unilatérales.

Toutes les p-valeurs unilatérales du test comparant  $m_1$  (loi de puissance) à  $m_2$  (loi normale) sont égales à 1. Cela veut donc dire que  $m_1$  n'est pas meilleur que  $m_2$  puisque les p-valeurs sont supérieures à 0,05. On regarde alors les p-valeurs bilatérales de la comparaison  $m_2$  vs  $m_1$ , qui sont égales à zéro. Cela veut donc dire que  $m_1$ , **la distribution en loi normale, est plus proche de la distribution étudiée que  $m_2$ , la distribution en loi de puissance.**

Je peux donc en conclure que la loi de puissance, bien qu'étant une option plausible, est moins adaptée à la modélisation de données boursières que la loi normale.

## Chapitre 5 : Pour aller plus loin : quelques modèles alternatifs

La remise en cause de l'utilisation de la loi normale dans les modèles de gestion d'actif financiers a aujourd'hui déjà une multitude de partisans, et quelques scientifiques tentent donc de créer des modèles, ou de modifier certaines parties des modèles existants afin qu'ils intègrent les lois de puissances ou autres distributions similaires.

### **5.1 Benoit Mandelbrot et les fractales**

#### **5.1.1 Un peu d'histoire**

Afin d'introduire les fractales, il est important de réaliser un bref retour en arrière. En 1962, alors que Benoit Mandelbrot étudiait la répartition des revenus entre les riches et les pauvres à travers la société, il rencontre le professeur Hendrik. S. Houtthakker. Ce dernier effectuait des travaux sur la distribution des prix du coton à partir de laquelle il tentait de vérifier le modèle de Bachelier en vain, puisqu'il constatait de grands sauts dans les fluctuations de prix, ce qui ne correspondait pas à la loi normale. En regardant brièvement les travaux de Houttakker, Mandelbrot vit alors, à sa grande surprise, que la représentation graphique de la distribution du coton était pratiquement identique à celle qu'il avait obtenue dans son étude de la distribution des revenus (Mandelbrot et Hudson, 2006). C'est à la suite de cette rencontre que Mandelbrot va se lancer dans des recherches qui vont le mener à la découverte des fractales géométriques en 1975 dans son essai « les objets fractals : forme, hasard et dimension ».

#### **5.1.2 Définition et lexicologie**

##### **5.1.2.1 Fractale**

La définition de ce terme n'est pas simple et de nombreuses définitions présentées dans la littérature sont incorrectes, Mandelbrot lui-même peine à en donner une satisfaisante dans ses ouvrages, mais laisse ressortir un semblant de définition lors d'un entretien pour « La Recherche » que voici : « Les fractales sont des objets géométriques qui ont la propriété que voici : ils peuvent être décomposés en fragments dont chacun a la même forme que le tout. Dans le cas de la Bourse, l'objet géométrique est une de ces courbes très irrégulières qui donnent, par exemple, le prix d'une action en fonction du temps. »

Voici cependant quelques définitions qui peuvent aider à comprendre ce concept :

- « Certaines structures très irrégulières, souvent construites par itération, possèdent des symétries de dilatation caractéristiques : l'agrandissement d'une partie est semblable au tout. Le concept de fractalité unifie la description de nombreux objets mathématiques ou physiques et quantifie leur degré d'irrégularité. » (Universalis, s. d.).

- « ...fractales géométriques qui sont des objets géométriques ayant la propriété de se décomposer en fragments, dont chacun à la même forme que le tout. » (« Comptes rendus de lecture », 2006, p. 90).

Le nom fractale et l'adjectif fractal furent créés par Mandelbrot dans le cadre de son livre à partir de l'adjectif latin *fractus*, qui signifie « irrégulier ou brisé ».

#### 5.1.2.2 Géométrie fractale

Mandelbrot s'opposait fermement à la vision orthodoxe de la finance qui considère les phénomènes extrêmes comme des imperfections, des irrégularités à ignorer. C'est avec cette idée en tête qu'il se lance dans la finance « anormale ».

Afin d'aborder les fractales, Mandelbrot développe alors une géométrie à part, permettant de décrire l'anormalité d'une forme ou d'un processus et d'anticiper l'irrégularité. Il faut donc utiliser cette « boîte à outils mathématique » comme il aime l'appeler afin de discerner la structure dans l'uniforme. Cette boîte à outils n'est autre que la géométrie fractale (Buissonière et Reynaud, 2012).

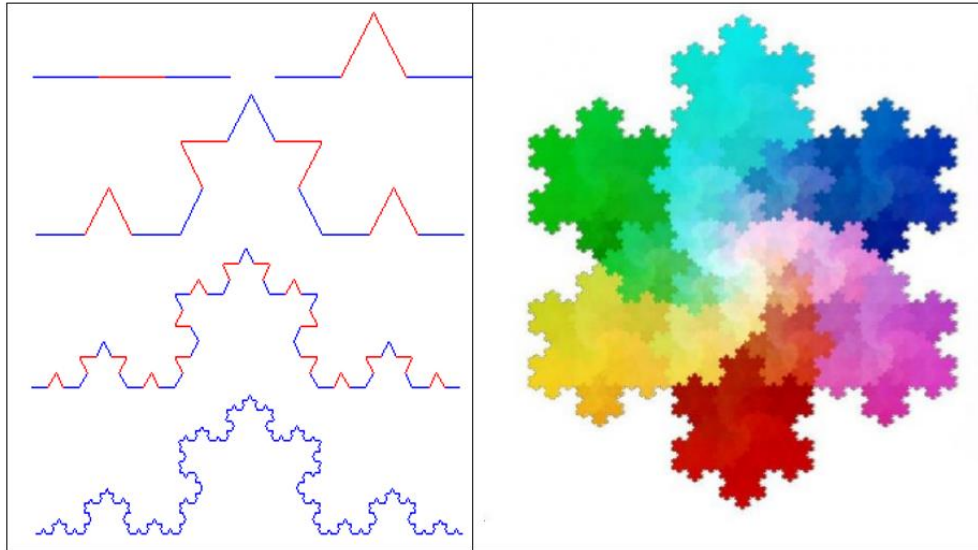
#### 5.1.3 Propriétés : Auto-similarité et auto-affinité

##### 5.1.3.1 Une fractale linéaire : l'auto-similarité

Les définitions du concept de fractale, bien que parfois différentes les unes des autres, ont toutes une idée en commun :

Une fractale est une figure géométrique pouvant être décomposée en plusieurs petites parties présentant chacune des similarités avec le tout. Cependant, même en ayant relu cette phrase encore et encore, il m'était difficile de m'imaginer comment cela pouvait fonctionner. Le meilleur moyen d'expliquer ce phénomène est de l'illustrer en images. L'exemple le plus communément utilisé afin d'expliquer le fonctionnement d'une fractale est la courbe de Helge Von Koch, également appelée Flocon de Koch. Toute construction commence avec un simple segment 1, que l'on coupe en trois parties égales. On remplace ensuite la partie centrale par un triangle équilatéral de base  $1/3$ , comme vous pouvez le voir dans la figure ci-dessous. La longueur de la figure n'est alors plus égale à 1 mais bien à  $4/3$  (Buissonière et Reynaud, 2012).

**Figure 27 :** Représentation du processus de fabrication du « flocon de Koch »



Source : Mandelbrot, B., & Hudson, R. L. (2009). *Une approche fractale des marchés : Risquer, perdre et gagner (OJ.ECONOMIE) (French Edition)*. Paris, France : Odile Jacob.

Dans la troisième étape, l'opération est répétée pour chaque segment de la figure précédente. La longueur n'est alors plus égale à  $4/3$ , mais bien à  $4/3$  au carré (nous sommes donc dans une loi de puissance). Ainsi, à chaque nouvelle étape, la longueur de la courbe croît, elle se multiplie par un **même facteur d'agrandissement**. Cette opération peut ensuite être répétée indéfiniment jusqu'à atteindre la limitation spatiale qui prend une forme semblable à un flocon (la forme a alors une longueur infinie mais une surface finie). L'opération peut cependant être répétée  $n$  fois et sa longueur est ainsi infinie.

En observant cette courbe, on peut discerner la propriété qui se retrouvait dans toutes les définitions de fractales. Effectivement, le Flocon de Koch possède la propriété d'**auto-similarité**. Cela s'observe par le fait que toute partie de la figure convenablement séparée (dilatée) de l'ensemble peut être superposée sur une partie plus grande.

Cette idée, malgré son apparence quelque peu compliquée au premier abord, se retrouve pourtant dans une multitude de phénomènes naturels et d'objets que nous rencontrons quotidiennement, je pense notamment à la forme d'un chou ou d'une fougère. Bien entendu, dans le cas des fractales réelles, à partir d'une certaine étape, agrandir la courbe ne permet plus de voir de nouveaux détails. Le processus d'itération ne peut donc pas être infini comme dans le cas de la courbe de Von Koch. (Buissonnière et Reynaud, 2012)

**Figure 28** : représentation du phénomène de fractale dans la nature.



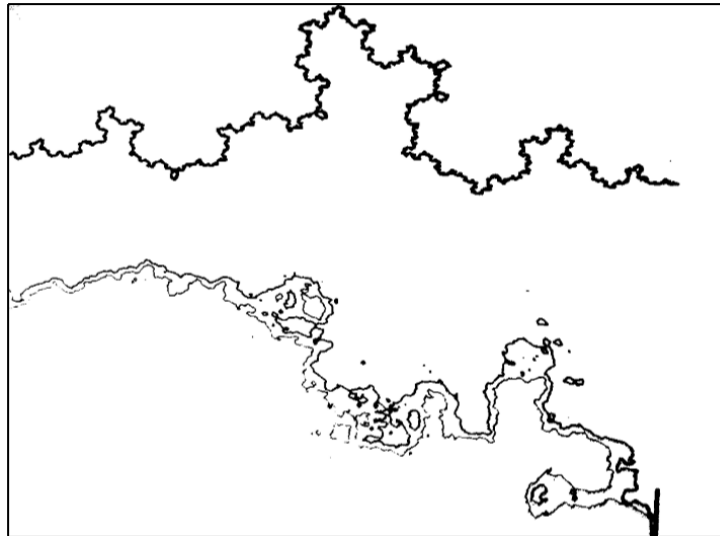
Source: Mandelbrot, B., & Hudson, R. L. (2006). *The Misbehaviour of Markets: A Fractal View of Financial Turbulence* (annotated edition, p.141). New York, United States : Basic Books.

Ce principe d'auto-similarité nous ramène une nouvelle fois au point dédié aux lois de puissance puisqu'il peut être représenté par le principe d'invariance d'échelle.

#### 5.1.3.2 Une fractale irrégulière : l'auto-affinité

Les courbes fractales peuvent également adopter un comportement irrégulier, aléatoire. Effectivement, dans certains cas de figure, le facteur d'échelle, également appelé facteur de dilatation n'est pas identique d'une étape à l'autre. Ces objets sont appelés des **fractales auto-affines** (principe d'auto-affinité). Pour reprendre l'exemple de la courbe de Von Koch, le sens du triangle équilatéral ainsi que sa place sont déterminés par le hasard, ce qui donne une courbe beaucoup plus irrégulière, même si elle utilise les mêmes bases.

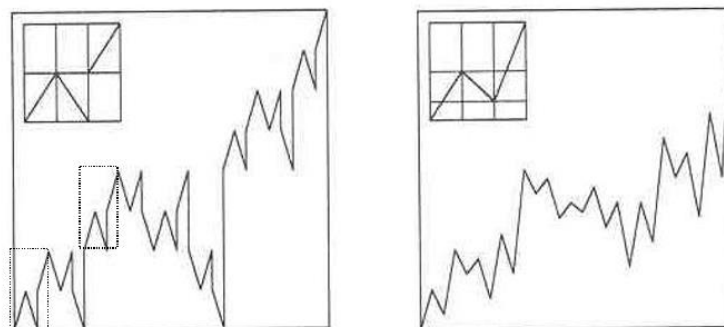
**Figure 29 :** simulation de la courbe de Von Koch irrégulière.



Source: Mandelbrot, B., & Hudson, R. L. (2006). *The Misbehaviour of Markets: A Fractal View of Financial Turbulence* (annotated edition, p.138). New York, United States : Basic Books.

Ces fractales auto-affines sont plus appropriées pour l'étude des cours financiers puisqu'elles intègrent la notion de « hasard », absente des fractales auto-similaires où les résultats de la construction étaient prévisibles. Ainsi, à l'aide d'une simple diagonale de pente 1 d'un carré, on peut reproduire, en utilisant la même méthodologie, des graphiques semblables à des graphiques de cours boursiers (Adams, 2001).

**Figure 30 :** fractales auto-affines



source : Adams, E. (2001). *L'analyse fractale des marchés financiers* (Thèse). Consulté à l'adresse [https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?news\\_link=mem%2Fab779061f85de4c3072e7d273222ee42.pdf&fg=1](https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?news_link=mem%2Fab779061f85de4c3072e7d273222ee42.pdf&fg=1)

#### 5.1.4 La création d'un modèle multifractal : Les syndromes de Joseph et de Noé

Mandelbrot tente donc d'utiliser ce concept de fractale afin de créer un tout nouveau modèle financier, le modèle multifractal. L'objectif de son modèle est d'intégrer deux phénomènes qu'il observa dans les cours de bourses, et qui malgré leur importance, sont absents du modèle de Bachelier. Il nomme ces deux phénomènes le *syndrome de Noé* et le *syndrome de Joseph*.

a) La présence de discontinuités : le syndrome de Noé

Le premier phénomène que Mandelbrot étudie et qui va constituer un pilier de son modèle est le fait que les prix boursiers présentent des variations extrêmes beaucoup plus fréquemment que ce que prédit la courbe gaussienne. Il qualifie ce comportement de « hasard sauvage » et nomme ce phénomène le syndrome de Noé afin de faire allusion au mytique déluge auquel Noé doit faire face.

Il déclare également que si le but de la gestion financière est de mesurer et gérer le risque, ce ne sont pas les variations typiques (mesurées par l'écart-type) qu'il faut mesurer mais bien les mouvements brutaux des cours boursiers et leurs pendents statistiques, une queue de distribution épaisse des rendements, différente de celle de la courbe gaussienne. Il propose alors de remplacer le mouvement brownien par les processus de Lévy, qui modélisent une évolution aléatoire discontinue composée d'une multitude de sauts de toutes tailles. (Cont, 2012)

b) Persistance et concentration des variations boursières : le syndrome de Joseph

Le deuxième pilier du modèle de Mandelbrot étudie les dépendances temporelles et les persistances dans les mouvements boursiers. Effectivement, il observe à travers ses études une certaine concentration dans le temps. Les petits mouvements de cours sont généralement suivis d'autres petits mouvements ; les grosses variations sont souvent suivies d'autres grosses variations. On retrouve ici l'idée d'une certaine mémoire dans le marché, qui est malheureusement absente des modèles actuels.

En plus de cette mémoire court-terme, Mandelbrot met également en évidence un phénomène de dépendance à longue portée. Les rendements des actifs financiers sur des jours éloignés dans le temps pourraient alors également montrer une forte dépendance, comme il le montre dans son article « Analysis of long-run dependence in economics: the R/S technique » en 1971.

Mandelbrot nomme ces deux phénomènes le syndrome de Joseph et propose de les modéliser en remplaçant le mouvement brownien par le mouvement brownien fractionnaire, qui est un autre processus aléatoire dont les mouvements sont gaussiens mais fortement dépendants, sur des périodes courtes comme sur des périodes éloignées (Cont, 2012).

### 5.1.5 Conclusion

La fréquence des valeurs extrêmes est donc beaucoup plus élevée que ce que suggère le mouvement brownien, et ce soit à cause de la discontinuité des prix, soit de la concentration des pertes dans le temps.

À partir de ces deux piliers, Benoit Mandelbrot crée un modèle qui tente de repérer la régularité dans les turbulences du marché. Ses travaux sont cependant encore dans un cadre conceptuel. Il nous invite, avant de tenter de réaliser des prévisions, à faire ressortir le caractère fractal des phénomènes de marchés et à rentrer dans un cadre intellectuel renouvelé, différent des modèles néoclassiques enseignés actuellement. Au fil du temps, de nombreux travaux furent rédigés, tels que ceux de Calvet & Fisher (2001) ou encore Bacry & Muzy (2010), ayant pour but de développer les processus multifractals de Mandelbrot. Ces modèles sont cependant fort complexes et leur application nécessiterait une thèse à part entière, je ne les explorerai donc pas davantage dans le cadre de ce mémoire. Je dois cependant reconnaître que les idées présentées par Mandelbrot ont le mérite d'offrir une représentation fort adéquate de la réalité. Il pose dans ses ouvrages les bonnes questions, et leur apporte bon nombre de bonnes réponses. La voie ouverte par Benoit Mandelbrot, bien qu'encore en phase exploratoire me semble pleine d'opportunité, et j'espère que les modèles qui en découlent seront bientôt finalisés et intégrés aux formations.

## **5.2 De nouvelles mesures de risque : Extreme Value Theory et Expected Shortfall**

Dans sa collection nommée "incerto", et en particulier dans l'ouvrage « The Black Swan : the impact of the highly improbable », Nassim Nicholas Taleb (2007) met en évidence la forte incertitude des marchés financiers à travers un terme qui deviendra ensuite fort utilisé dans le monde financier, la théorie du cygne noir, ou Black Swan. Selon lui, les Black Swan ont trois caractéristiques principales :

- Elles sont extrêmement rares (ce sont des aberrations statistiques) ;
  - L'impact de l'évènement est très disproportionnellement important ;
  - Elles sont en général rationalisées, expliquées a posteriori par les analystes.
- Avec le recul, on voit qu'elles étaient prévisibles.

Il remet également en cause la tendance des experts à vouloir tout prédire, à prétendre pouvoir voir venir des événements qui en réalité sont imprévisibles. Il propose, à la place, de profiter des événements positifs tout en se préparant à subir les événements négatifs en construisant une certaine robustesse dans nos portefeuilles. C'est donc dans ce cadre qu'il pousse à l'utilisation de l'Extreme Value Theory (EVT) et de l'Expected Shortfall (ES) comme extensions à la méthodologie bien connue de la Value at Risk (VaR).

### **5.2.1 La VaR et ses limites**

#### **a) VaR**

Le concept de la VaR est relativement simple. Elle fut créée afin de mesurer l'impact des changements dans le marché financier sur les portefeuilles des investisseurs dans le



but de sensibiliser les gestionnaires de risque à la gravité des pertes potentielles qui peuvent être provoquées par des événements extrêmes. Elle cherche à quantifier le risque financier d'une position, d'un portefeuille ou même d'une entreprise sur une certaine période et est ainsi utilisée par les gestionnaires afin de gérer ce risque.

Elle peut être définie, pour un certain intervalle de temps et intervalle de confiance, comme :

- La perte maximale d'un actif financier en situation de marché normale ;
- La perte minimale d'un actif financier dans une situation de marché extraordinaire.

On cherche donc à calculer la probabilité  $p$ , qui est la probabilité de subir une perte égale ou supérieure à la VaR, et qui représente donc la probabilité d'occurrence d'un événement extrême. En termes mathématiques, la probabilité qu'un détenteur d'une position longue subisse une perte égale ou supérieure à la Var est égale à :

$$p = [x \leq \text{VaR}] = \int_{-\infty}^{\text{VaR}} f(x)dx = F(\text{VaR})$$

Où  $f(x)$  est la fonction de densité de probabilité et  $F(x)$  est la fonction de distribution cumulative correspondante.

L'objectif du calcul de la VaR est essentiellement de trouver cette fonction de distribution cumulative et les quantiles qui lui sont associés. Où le  $p^{\text{ème}}$  quantile de  $F(x)$  est défini comme :

$$x_p = \min\{x | F(x) \geq p\}$$

Cette équation stipule donc que le  $p^{\text{ème}}$  quantile,  $x_p$ , est le plus petit nombre qui satisfait  $F(x) \geq p$ . La VaR est alors le  $p^{\text{ème}}$  quantile de la distribution cumulative (Nielsson, 2009).

#### b) Méthodologies

Il y a plusieurs manières d'estimer la VaR, voici une brève présentation des trois méthodes les plus utilisées :

- **Méthode de variance-covariance**

Cette approche paramétrique (suppose que les retours boursiers suivent une certaine distribution, en général la loi normale) est la méthode la plus utilisée. Elle fonctionne de la manière suivante : elle détermine la volatilité du portefeuille en utilisant le poids des actifs constituant le portefeuille ainsi qu'en construisant une matrice variance-covariance à l'aide de modèles paramétriques tels que les modèles GARCH présentés précédemment ou autre modèles de volatilité stochastique. Ceci est bien sur une explication quelque peu simplifiée, bien que le modèle en lui-même reste relativement accessible et intuitif.

Cette simplicité a cependant un prix, avec entre autres l'hypothèse de normalité des rendements qui peut conduire à une sous-estimation de la VaR lorsqu'on avance dans les extrémités des queues de distribution. Cela rend cette méthode peu adaptée à l'analyse de l'impact des événements extrêmes (Nielsson, 2009).

- Méthode historique

Contrairement à la méthode de variance-covariance, cette méthode est non-paramétrique puisqu'elle ne pose aucune hypothèse de distribution des rendements. Dans sa forme la plus simple, la méthode historique, comme son nom l'entend, prend les rendements historiques de tous les actifs constituant un portefeuille ainsi que leur poids relatif et calcule le rendement dudit portefeuille. Ensuite, en fonction du niveau de confiance choisi (prenons une VaR de 5%), il suffit de prendre les 5 plus mauvais rendements dans un échantillon de 100 afin d'estimer la VaR. Cette méthode repose sur la condition que l'histoire se répète et qu'aucun nouveau facteur de risque ne fasse son apparition, auquel cas les données obtenues deviendraient non-pertinentes. Elle n'est donc pas non plus la plus adaptée à l'étude des événements extrêmes. (Nielsson, 2009)

- Méthodes de simulation

Cette approche inclut les méthodes telles que la simulation de Monte-Carlo ou la simulation stochastique. Elle consiste à créer un modèle qui génère une suite de rendements potentiels des actifs étudiés en simulant une multitude d'événements aléatoires. Le processus est ainsi répété jusqu'à obtenir une distribution de revenu. Cette méthode a l'avantage de pouvoir gérer des données non-linéaires, non-normales etc. Elle est cependant fort complexe et demande énormément de temps et d'investissement, ce qui la rend difficilement utilisable. (Nielsson, 2009)

### c) Limites

La VaR a cependant certaines limites, dont une pose particulièrement problème dans le monde financier : au-delà du seuil de confiance étudié, la VaR ne s'intéresse pas aux valeurs extrêmes, alors que c'est cette partie qui intéresse particulièrement les gestionnaires de risque/portefeuille. Ainsi, deux portefeuilles avec la même VaR peuvent subir des pertes très différentes dans le cas où un événement extrême apparaît. De plus, au plus l'intervalle de confiance est élevé (donc au plus on cherche à incorporer les événements extrêmes), au moins la mesure de la VaR est fiable. Effectivement, l'estimation de l'effet de ces événements extrêmes à travers la VaR est compliquée puisque par définition, on possède peu d'observations sur lesquelles se baser. On peut bien sûr émettre une hypothèse sur la distribution des rendements en utilisant la méthode paramétrique, mais comme vu précédemment, les distributions standards telles que la distribution normale ou t-distribution peinent à représenter des queues de distributions représentatives des événements extrêmes. C'est pour pallier ces limites que l'EVT entre en jeu. (Nielsson, 2009)

#### 5.2.1.1 L'Extreme Value Theory

L'EVT va permettre aux gestionnaires d'effectuer des prévisions sur les événements qui se trouvent dans les queues de distribution au-delà du quantile de la VaR. Pour ce faire, EVT prend une approche semi-paramétrique, composée donc d'une combinaison de l'approche de simulation historique (non-paramétrique) et d'une estimation paramétrique des queues de distribution. De cette manière, les risques les plus extrêmes sont modélisés de manière paramétrique, alors que les risques plus petits sont mesurés par une distribution empirique des rendements.

Afin de trouver la distribution à queue épaisse appropriée aux revenus extrêmes étudiés, l'EVT utilise un théorème appelé le théorème de Fisher-Tippet. Ce théorème permet d'obtenir une distribution limite (également appelée distribution asymptotique) indépendante de la distribution des revenus qui ne se trouvent pas dans les queues de distribution. De cette manière, aucune hypothèse ne doit être émise à propos de la distribution en dehors des queues.

Pour une suite de rendements indépendants et identiquement distribués  $x$ , le théorème dit que la distribution limite des valeurs extrêmes de  $x$  tend vers une loi d'extremum généralisée (plus connus sous le nom de generalised extreme value, GEV) que voici (Nielsson, 2009) :

$$GEV_{\xi, \mu, \sigma} = \begin{cases} e^{-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}} & \text{if } \xi \neq 0 \\ e^{-e^{-(x - \mu)/\sigma}} & \text{if } \xi = 0 \end{cases}$$

Où :

- $\mu$  est un paramètre d'emplacement qui mesure la tendance centrale de la distribution ;
- $\sigma$  est un paramètre d'échelle mesurant la dispersion ;
- $\xi$  mesure l'épaisseur de la queue de distribution et est appelé paramètre de forme.

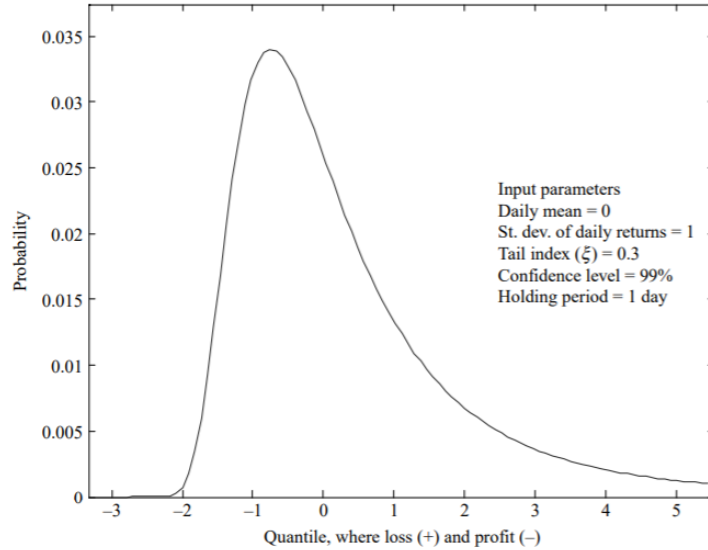
Cette approche de la VaR traite principalement de l'estimation de ce paramètre de forme. Au plus  $\xi$  est élevé, au plus la queue de distribution est épaisse, la probabilité d'occurrence des événements extrêmes est alors plus élevée. À l'inverse, lorsque  $\xi$  tend vers zéro, la queue de distribution est fine et semble avoir les mêmes propriétés qu'une distribution normale. La probabilité des événements extrêmes est alors faible. La GEV peut prendre trois formes différentes en fonction de la valeur du paramètre  $\xi$  :

- Gumbel si  $\xi = 0$  ;
- Fréchet si  $\xi = 1/\alpha > 0$ , alors appelée queue dense ;
- Weibull si  $\xi = -1/\alpha < 0$ .

Dans notre cas, on recherche une distribution pour laquelle  $\xi > 0$ . La distribution qui intéresse principalement le secteur financier est donc la distribution de Fréchet, qui est une t-distribution, désaxée vers la droite avec une longue queue de distribution qui suit **une loi de puissance**. On utilise alors la queue de distribution droite pour

représenter les pertes lorsqu'on estime la VaR, alors que la queue de gauche est ignorée. Sa densité de probabilité est montrée ci-dessous :

**Figure 31** : densité de probabilité de la fonction de Fréchet



Source: Nielsson, U. (2009). Measuring and regulating extreme risk. *Journal of Financial Regulation and Compliance*, 17(2), 156-171. <https://doi.org/10.1108/13581980910952595>

De la formule de base montrée précédemment, Embrechts et al. (1997) créent la formule permettant de calculer la VaR pour un certain niveau de confiance  $\alpha$  :

$$\text{VaR} = \mu - \frac{\sigma}{\xi} + \sigma \log(\alpha) \quad \text{if } \xi > 0$$

Cette formule rend le calcul de la VaR relativement rapide, cependant les trois paramètres doivent être estimés. Alors que les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  peuvent facilement être estimés à l'aide d'une méthode de régression ou une méthode de maximum de vraisemblance comme celle utilisée précédemment, l'estimation du paramètre de forme est plus compliquée et est en général réalisée en utilisant l'estimateur de Hill (Dowd, 2005), donné par :

$$\hat{\xi}_{\text{Hill}} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln X_j - \ln X_{k+1}$$

Où  $X$  est le rendement et  $k$  est le seuil des queues de distribution (paramètre qui indique quand la queue commence et représente le nombre d'observations dans la queue).

Par rapport aux trois méthodes présentées précédemment, cette approche de la VaR apporte de nombreux avantages. Premièrement, elle n'impose pas de distribution irréaliste comme le fait l'approche variance-covariance avec la loi normale et permet de ne pas devoir utiliser de méthodes d'estimation de la volatilité comme les méthodes GARCH qui peinent à représenter les événements extrêmes. L'EVT permet également de fonctionner sans avoir besoin de beaucoup d'observations comme la méthode historique et permet ainsi de pouvoir réaliser des estimations de VaR à niveau de confiance extrêmement élevé.

Danielsson and de Vries (2000) montrent que l'EVT surperforme les autres approches quant à la gestion d'événements extrêmes, et ce, en restant assez intuitive malgré son approche quelque peu technique. L'EVT est une claire amélioration dans l'étude des queues de distribution, mais présente cependant encore quelques lacunes. Le choix du seuil des queues de distribution lors de l'utilisation de l'estimateur de Hill est fort subjectif puisque la théorie n'offre que peu d'orientation à ce sujet. Malgré cela et quelques autres lacunes mineures, l'EVT offre une approche nouvelle permettant de quantifier des VaR allant plus loin dans les queues de distributions, et capture ainsi plus de risques que les autres approches. Le risque capturé est également plus plausible, par l'utilisation de la distribution de Fréchet, qui permet une meilleure analyse des événements à très faible probabilité (Nielsson, 2009).

### 5.2.2 Expected Shortfall

Bien que fort complète, l'estimation de la VaR par l'EVT ne permet cependant toujours pas de quantifier la **totalité** du risque. Effectivement, une lacune de la VaR subsiste encore, le fait qu'elle indique uniquement la **perte minimale** qu'un investisseur doit s'attendre à subir si un événement extrême se produit, en d'autres mots, elle ne calcule qu'un point dans la queue de distribution, un quantile. Elle ne donne aucun renseignement sur l'importance des pertes extrêmes dans le cas de figure où on dépasserait la  $VaR_\alpha$  au niveau de confiance  $\alpha$ .

Afin de remédier à cela, il est alors important de calculer une extension de la VaR : l'Expected Shortfall (ES), qui a pour but d'apporter une estimation de la perte potentielle si un événement extrême venait à se produire. Cette mesure du risque est complémentaire à la VaR puisqu'elle donne la perte probable sur T jours, dans le cas où la perte L viendrait à dépasser la VaR. Elle est, par définition, toujours supérieure à la VaR. Elle est écrite de la manière suivante (Bakkar, 2018) :

$$ES_\alpha(L) = E[L \mid L \geq VaR_\alpha(L)].$$

Mathématiquement, l'Expected Shortfall est relativement intuitive. Puisqu'elle représente la perte attendue de la queue de distribution, elle est donc calculée comme une moyenne pondérée des pertes qui se trouvent au-delà de la VaR.

Il est également important de noter que l'ES possède la propriété de sous-additivité, ce qui n'est pas toujours le cas de la VaR, et qui est considérée comme une exigence pour pouvoir qualifier une mesure de risque d'acceptable (aux côtés de la monotonie, l'invariance de la translation et l'homogénéité (Szegő, 2002)). Cela signifie que regrouper des risques individuels n'augmente pas nécessairement le risque total. On retrouve donc ici le concept de diversification grâce auquel le risque d'un portefeuille financier peut être plus faible que la somme des risques individuels des actifs le constituant (Bakkar, 2018)

L'ES, en plus de sa facilité d'utilisation, possède les avantages de la VaR en plus d'une réelle quantification du risque des événements extrêmes. La réalisation de l'ES demande

cependant énormément de données. Pour un même niveau de précision, il faut un plus grand échantillon pour calculer l'Expected Shortfall que pour calculer la VaR. Prenons par exemple un échantillon de 500 données et une VaR pour un niveau de confiance de 99%. La VaR serait ici la 5<sup>ème</sup> plus petite observation de l'échantillon. L'ES serait alors calculée sur les 5 plus petites observations, ce qui est vraiment très peu pour réaliser une estimation plausible. Cependant, en utilisant L'EVT et l'ES côte à côte, il est possible d'estimer une multitude de valeurs pour la queue de distribution et ainsi d'avoir un échantillon assez grand à disposition, permettant ainsi de calculer une Expected Shortfall fiable. C'est pourquoi il faut voir ces deux méthodes comme des compléments qui comblent chacune les lacunes de l'autre.

## Chapitre 6 : Conclusion et limites

À travers ce mémoire, j'ai voulu faire ressortir les limites qui accompagnent l'hypothèse de normalité émise par la théorie moderne du portefeuille de Markowitz et autres modèles complémentaires proposés par l'école classique. Cette hypothèse est fort restrictive et sous-estime grandement la probabilité d'événements extrêmes, ce qui peut mener les investisseurs à subir des pertes astronomiques en période de forte volatilité dues à une mauvaise allocation de leur portefeuille. L'objectif est donc de sensibiliser les praticiens et théoriciens à ces limites et à l'ampleur des dégâts qu'elles peuvent causer afin de pousser à l'intégration de modèles alternatifs aux cursus universitaires.

Je présente également une alternative à cette hypothèse sous la forme des lois de puissances, utilisées aujourd'hui dans de nombreux domaines où les professionnels sont confrontés à l'étude d'événements extrêmes, ainsi que deux modèles financiers mettant cette distribution en pratique : le modèle fractal de Benoit Mandelbrot ainsi que l'Extreme Value Theory et l'Expected Shortfall de Nassim N. Taleb.

Afin de vérifier mes hypothèses, j'ai réalisé deux études empiriques :

La première a pour but de remettre en cause l'hypothèse de normalité des rendements boursiers. Je commence cette remise en cause avec un compte rendu illustré afin de montrer visuellement les différences entre la théorie et la réalité. Je réalise ensuite une multitude de tests afin de vérifier la normalité des rendements boursiers. J'effectue tout d'abord une analyse de la skewness et du kurtosis de plusieurs échantillons tirés du S&P 500 entre 1980 et 2020 ; je réalise ensuite une suite de tests de normalité sur ces mêmes échantillons.

La seconde étude consiste en un test de compatibilité de la loi de puissance avec mes échantillons de rendements boursiers. Je réalise pour cela un test de goodness-of-fit afin de déterminer si la loi de puissance est une hypothèse plausible pouvant expliquer la distribution de mes données. J'effectue ensuite un test de ratio de vraisemblance (likelihood-ratio test) afin de comparer la comptabilité de mes données avec la loi de puissance par rapport à la loi normale.

Ces deux analyses empiriques m'ont apporté un ensemble de constats et de résultats intéressants. Comme la littérature le suggérait, l'hypothèse de normalité des rendements ne se vérifie pas. L'ensemble des tests réalisés rejettent cette hypothèse avec un intervalle de confiance à 95%. Les échantillons étudiés montrent une distribution leptokurtique avec une probabilité d'occurrence des événements extrêmes beaucoup plus élevée que ce que suggère la loi normale.

Les résultats de la seconde étude sont eux plus mitigés. Les résultats du test de goodness-of-fit sont concluants et suggèrent plausible l'hypothèse que les rendements

boursiers de mes échantillons suivent une distribution en loi de puissance. Le second test, qui compare la compatibilité des échantillons avec les deux lois de probabilité, révèle que la loi normale correspond mieux à l'échantillon étudié que la loi de puissance.

Je peux donc en conclure que la loi de puissance, bien qu'étant une alternative plausible à la loi normale, ne la surperforme pas quant à la représentation de la totalité des fluctuations des rendements boursiers. Cela peut s'expliquer par le fait que la loi normale fonctionne pour une majorité des situations de marchés classiques. Le test de Vuong utilisé mesure chaque point des distributions théoriques et les compare avec la distribution étudiée. Si la loi normale est compatible avec 95% des variations des cours de bourse, il est normal qu'un tel test statistique la considère comme la distribution la plus adaptée. L'utilité principale des lois de puissance est l'analyse d'événements extrêmes, et donc la modélisation des queues de distribution. La solution est donc peut-être de considérer les lois de puissance comme un outil complémentaire à la loi normale ou autre distribution similaire permettant cette modélisation et non comme un substitut de ces dernières. Il faudrait donc réaliser davantage d'analyses afin de vérifier quelle distribution est la plus adaptée à l'étude des variations des cours boursiers. Même si je ne peux prouver qu'elle est la solution optimale, j'ai cependant déjà démontré avec le test de goodness-of-fit que la loi de puissance est une hypothèse plausible qui vaut la peine d'être considérée.

Bien évidemment, mes recherches montrent certaines limites, que je vais énoncer ci-dessous.

Tout d'abord, le test de Vuong (2009) utilisé ne prend pas en compte l'ampleur des variations des distributions théoriques par rapport à la distribution étudiée. Afin de réellement comparer la compatibilité de la loi normale et de la loi en puissance par rapport aux cours boursiers, il faudrait créer un test qui puisse prendre en compte cette dimension. Cela requiert cependant davantage de temps et de travail, et l'utilisation de R afin d'effectuer les tests présents dans ce mémoire constitua déjà pour moi un défi important ayant nécessité un apprentissage conséquent.

Une autre limite découle de mon choix d'indice de référence. J'ai décidé en réalisant mes analyses de me concentrer uniquement sur le S&P 500, jugeant que cet indice était suffisamment représentatif du marché dans son ensemble. Idéalement, il faudrait cependant effectuer l'ensemble des tests réalisés sur l'entièreté du portefeuille de marché.

Finalement, le domaine des lois de puissance s'avère beaucoup plus vaste que je ne l'imaginais en choisissant ce sujet de mémoire, et leur application à la finance est encore un concept assez jeune. Je ne veux pas dire par là que le sujet en est moins intéressant, bien au contraire, les possibilités d'applications semblent sans fin.



Cependant l'étude de chacune desdites applications (distributions fractales, processus exponentiel-Lévy, modèle des lois de puissances à changement de régimes...) nécessite à elle seule un mémoire à part entière. C'est pourquoi j'ai dû me limiter à les introduire de manière fort descriptive.

Il n'en est pas moins que je trouve le sujet intéressant, et les arguments posés en faveur des lois de puissance fort convaincants. De la même manière que la physique, la biologie et autres secteurs scientifiques ont connu des innovations majeures et des révolutions conceptuelles durant le 20<sup>ème</sup> siècle, la finance a besoin d'effectuer sa « mue », de remettre en question ses acquis quitte à réévaluer les bases mêmes sur lesquelles reposent ces modèles. La crise du Covid-19 est un brusque rappel de l'impact que des phénomènes extrêmes peuvent avoir sur le marché et l'économie mondiale. Il est aujourd'hui primordial de concentrer nos recherches vers des mesures de risque nouvelles afin d'apprendre à mieux protéger nos portefeuilles, car si les événements extrêmes sont de moins en moins rares, leurs impacts restent tout aussi catastrophiques.

## Bibliographie.

abcbourse. (s. d.). La théorie moderne du portefeuille. Consulté le 4 mai 2020, à l'adresse

[https://www.abcbourse.com/apprendre/19\\_theorie\\_moderne\\_du\\_portefeuille.html](https://www.abcbourse.com/apprendre/19_theorie_moderne_du_portefeuille.html)

Adams, E. (2001). *L'analyse fractale des marchés financiers* (Thèse). Consulté à l'adresse

[https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?news\\_link=mem%2Fab779061f85de4c3072e7d273222ee42.pdf&fg=1](https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?news_link=mem%2Fab779061f85de4c3072e7d273222ee42.pdf&fg=1)

Albouy, M., & Charreaux, G. (2005). La finance comportementale ou l'Émergence d'un nouveau paradigme dominant ? *Revue française de gestion*, 31(157), 215-238. <https://doi.org/10.3166/rfg.157.137-143>

Albouy, M., & Charreaux, G. (2017). *Les grands auteurs en finance (French Edition)* (2e éd.). Caen, France : Éditions EMS.

Anderson, T. W., & Darling, D. A. (1954). A Test of Goodness of Fit. *Journal of the American Statistical Association*, 49(268), 765-769. <https://doi.org/10.1080/01621459.1954.10501232>

Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 17, 21-86. <https://doi.org/10.24033/asens.476>

Bacry, E. and Muzy, J.-F. (2010). Multifractals. In Encyclopedia of Quantitative Finance, R. Cont (Ed.). doi:10.1002/9780470061602.eqf20004

Baker, M. P., & Wurgler, J. A. (2011). Behavioral Corporate Finance : An Updated Survey. *SSRN Electronic Journal*, 357-424. <https://doi.org/10.2139/ssrn.1909013>

Bakkar, Y. (2018). Apports de la Théorie des Valeurs Extrêmes au calcul de la Value-at-Risk (Contributions of the Extreme Values Theory in the calculation of Value-at-Risk). *SSRN Electronic Journal*, 1-32. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3398651>

Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654. <https://doi.org/10.1086/260062>

Bru, B. (2006). La courbe de Gauss ou le théorème de Bernoulli raconté aux enfants. *Mathématiques et sciences humaines*, (175), 5-23. <https://doi.org/10.4000/msh.3556>

Buissonnière, A., & Reynaud, R. (2012). *Economie financière et Théorie du Chaos : Comment s'est organisée la critique du modèle néoclassique en finance de marché ?* (Thèse). Consulté à l'adresse <https://aurelienbuissonniere.files.wordpress.com/2012/03/mc3a9moire-thc3a9orie-du-chaos-en-c3a9conomie-financic3a8re2.pdf>

Calvet, L., & Fisher, A. (2001). Forecasting multifractal volatility. *Journal of Econometrics*, 105(1), 27-58. [https://doi.org/10.1016/s0304-4076\(01\)00069-0](https://doi.org/10.1016/s0304-4076(01)00069-0)

Campbell, R., Koedijk, K., & Kofman, P. (2002). Increased Correlation in Bear Markets. *Financial Analysts Journal*, 58(1), 87-94. <https://doi.org/10.2469/faj.v58.n1.2512>

Clauset, A., Shalizi, C. R., & Newman, M. E. J. (2009). Power-Law Distributions in Empirical Data. *SIAM Review*, 51(4), 661-703. <https://doi.org/10.1137/070710111>

Comptes rendus de lecture. (2006). *Finance & Bien Commun*, 24(1), 90. <https://doi.org/10.3917/fbc.024.0090>

Cont, R. (2012). Benoit Mandelbrot et la modélisation mathématique des risques financiers. *HAL archives ouvertes.fr*, 1-11. Consulté à l'adresse <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00649050v2/document>

De Bruyn, M., & Loncke, E. (2015). *Allocation optimale dans les hedge funds et estimation de la matrice variance-covariance* (mémoire de master). Louvain School of Management, Louvain-La-Neuve. Consulté à l'adresse <http://hdl.handle.net/2078.1/thesis:2559>

De Marnix, G. (2018). *Analyse du phénomène de concentration dans la théorie de Markowitz et étude comparative d'approches alternatives* (mémoire de master). Louvain School of Management, Mons

D'Hondt, C. (2018). *Portfolio Management*. Syllabus. Louvain School of Management, Mons.

Dowd, K. (2005). *Measuring Market Risk* (2<sup>e</sup> éd.). New York, United States : Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118673485>

Dupuy, J.-P. (2010). Penser les événements extrêmes. *Annales des Mines - Responsabilité et environnement*, N°57(1), 10. <https://doi.org/10.3917/re.057.0010>

Embrechts, P., Resnick, S. I., & Samorodnitsky, G. (1999). Extreme Value Theory as a Risk Management Tool. *North American Actuarial Journal*, 3(2), 30-41. <https://doi.org/10.1080/10920277.1999.10595797>

Engle, R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4), 987-1007. doi:10.2307/1912773

Fama, E. F. (1970). Efficient Capital Markets : A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*, 25(2), 383. <https://doi.org/10.2307/2325486>

Fama, E., & French, K. (1992). The Cross-Section of Expected Stock Returns. *The Journal of Finance*, 47(2), 427-465. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1992.tb04398.x>

Field, A. (2009) *Discovering Statistics Using SPSS*. 3rd Edition, Sage Publications Ltd., London.

George, D. and Mallery, P. (2010) SPSS for Windows Step by Step: A Simple Guide and Reference 17.0 Update. 10th Edition, Pearson, Boston.

Goodman, L. A. (1954). Kolmogorov-Smirnov tests for psychological research. *Psychological Bulletin*, 51(2), 160-168. <https://doi.org/10.1037/h0060275>

Gravetter, F. J., & Wallnau, L. B. (2013). *Statistics for the Behavioral Sciences, 9th Edition* (9th éd.). New York, United States : Cengage Learning.

Herlin, P. (2012). *La remise en cause du modèle classique de la finance par Benoît Mandelbrot et la nécessité d'intégrer les lois de puissance dans la compréhension des phénomènes économiques* (thèse de doctorat). Conservatoire national des arts et métiers, Paris. Récupéré de <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00787464>

Jarque, C. M., & Bera, A. K. (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters*, 6(3), 255-259. [https://doi.org/10.1016/0165-1765\(80\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0165-1765(80)90024-5)

Jokung Nguéna, O. (2004). Chapitre 7 : Le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF). Le modèle de marché. L'efficience des marchés. Dans : *Mathématiques et gestion financière* (pp. 325-364). Louvain-la-Neuve : De Boeck Supérieur.

Joseph, N. (2020, 9 juillet). Kurtosis and Skewness. Consulté le 6 juin 2020, à l'adresse <https://analystprep.com/cfa-level-1-exam/quantitative-methods/kurtosis-and-skewness-types-of-distributions/>

Wall Street Journal. (s. d.). SPX | S&P 500 Index Historical Prices - WSJ. Consulté le 2 juin 2020, à l'adresse <https://www.wsj.com/market-data/quotes/index/SPX/historical-prices>

Jovanovic, F. (2002). Instruments et théorie économiques dans la construction de la « science de la Bourse » d'Henri Lefèvre. *Revue d'Histoire des Sciences Humaines*, 7(2), 41. <https://doi.org/10.3917/rhsh.007.0041>

K-means clustering | R. (s. d.). Consulté le 1 août 2020, à l'adresse <https://campus.datacamp.com/courses/practicing-machine-learning-interview-questions-in-r/unsupervised-learning-3?ex=1>

La théorie moderne du portefeuille. (s. d.). Consulté le 4 mai 2020, à l'adresse [https://www.abcbourse.com/apprendre/19\\_theorie\\_moderne\\_du\\_portefeuille.html](https://www.abcbourse.com/apprendre/19_theorie_moderne_du_portefeuille.html)

Lai, W. (2020). *Fitting Power Law Distributions to Data* (thèse). Consulté à l'adresse [https://www.stat.berkeley.edu/~aldous/Research/Ugrad/Willy\\_Lai.pdf](https://www.stat.berkeley.edu/~aldous/Research/Ugrad/Willy_Lai.pdf)

Ledoit, O., & Wolf, M. (2004). Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix. *The Journal of Portfolio Management*, 30(4), 110-119. <https://doi.org/10.3905/jpm.2004.110>

Mandelbrot, B. (1971) Analysis of long-run dependence in economics: the R/S technique. *Econometrica*, 39, 68-69.

Mandelbrot, B., & Hudson, R. L. (2006). *The Misbehaviour of Markets : A Fractal View of Financial Turbulence* (annotated edition). New York, United States : Basic Books.

Mandelbrot, B., & Hudson, R. L. (2009). *Une approche fractale des marchés : Risquer, perdre et gagner (OJ.ECONOMIE) (French Edition)*. Paris, France : Odile Jacob.

Markowitz, H. (1952). PORTFOLIO SELECTION\*. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>

Michaud, R. O. (1989). The Markowitz Optimization Enigma : Is Optimized Optimal ? *ICFA Continuing Education Series*, 1989(4), 43-54. <https://doi.org/10.2469/cp.v1989.n4.6>

Michel, H. (2015, 15 janvier). Loi normale. Consulté le 1 mai 2020, à l'adresse <http://www.ilovestatistics.be/probabilite/loi-normale.html>

Newman, M. E. J. (2005). Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. *Contemporary Physics*, 46(5), 323-351. <https://doi.org/10.1080/00107510500052444>

Nielsson, U. (2009). Measuring and regulating extreme risk. *Journal of Financial Regulation and Compliance*, 17(2), 156-171. <https://doi.org/10.1108/13581980910952595>

On the composition of elementary errors ; first paper. (1928). *Scandinavian Actuarial Journal*, 1928(1), 166. <https://doi.org/10.1080/03461238.1928.10416873>

Popier, A. (2016–2017). *Calcul stochastique, applications en finance*. (mémoire). Consulté à l'adresse [http://perso.univ-lemans.fr/~apopier/enseignement/ENSAI/poly\\_ENSAI\\_calcul\\_sto.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~apopier/enseignement/ENSAI/poly_ENSAI_calcul_sto.pdf)

Ross, S. A. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, 13(3), 341-360. [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(76\)90046-6](https://doi.org/10.1016/0022-0531(76)90046-6)

Rubinstein, M. (2002). Markowitz's "Portfolio Selection" : A Fifty-Year Retrospective. *The Journal of Finance*, 57(3), 1042. <https://doi.org/10.1111/1540-6261.00453>

Samuelson, P. A. (1970). The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in terms of Means, Variances and Higher Moments. *The Review of Economic Studies*, 37(4), 537-542. <https://doi.org/10.2307/2296483>

Schinckus, C. (2009). La finance comportementale ou le développement d'un nouveau paradigme. *Revue d'Histoire des Sciences Humaines*, 20(1), 101-127. <https://doi.org/10.3917/rhsh.020.0101>

Schoutens, W. (2003). *Levy Processes in Finance*. Hoboken, NJ, États-Unis : Wiley.

Shapiro, S. S., & Wilk, M. B. (1965). An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples). *Biometrika*, 52(3/4), 591. <https://doi.org/10.2307/2333709>

Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, 19(3), 425. <https://doi.org/10.2307/2977928>

Skewness & Kurtosis Analysis | Real Statistics Using Excel. (2017, 11 août). Consulté le 10 juin 2020, à l'adresse <http://www.real-statistics.com/tests-normality-and-symmetry/analysis-skewness-kurtosis/>

Sprenkle, M. (1961). Warrant prices as indicators of expectations and preferences. *Yale economics essays*, 1, 179-231. Consulté à l'adresse <https://www.coursehero.com/file/51522055/MIT15-401F08-lec10pdf/>

Soros, G., & Wronski, N. (2010). *Quelques leçons tirées de la crise : Conférences prononcées du 26 au 30 octobre 2009 à la Centrale European University, Budapest (Impacts) (French Edition)* (DENOEL éd.). Budapest, Hongrie : DENOEL.

Taleb, N. N. (2007). *The Black Swan : The Impact of the Highly Improbable* (1re éd.). New York, United States : Random House Trade Paperbacks.

Teknomo, K. (2017). Simulation of Geometric Brownian Motion. Consulté le 5 juin 2020, à l'adresse <https://people.revoledu.com/kardi/tutorial/StochasticProcess/BrownianMotion/GBMSimulation.html>

The Nobel Prize. (1990). Harry M. Markowitz Biographical. Consulté le 15 mai 2020, à l'adresse <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1990/markowitz/biographical/>

Tits, C. (2020). *Lois des probabilité*. Syllabus. Christ-Roi, Ottignies-Louvain-la-Neuve.

Trainar, P. (2019). Pourquoi le risque diversifiable est-il encore rémunéré ?. *Revue d'économie financière*, 133(1), 95-106. doi:10.3917/ecofi.133.0095.

Treynor, J. L. (1961). *Toward a Theory of Market Value of Risky Assets*. Consulté à l'adresse <https://ssrn.com/abstract=628187>

Trochim, W.M. and Donnelly, J.P. (2006) *The Research Methods Knowledge Base*. 3rd Edition, Atomic Dog, Cincinnati, OH.

Universalis, E. (s. d.). FRACTALES. Consulté le 15 juin 2020, à l'adresse [https://www.universalis.fr/encyclopedie/fractales/#i\\_0](https://www.universalis.fr/encyclopedie/fractales/#i_0)

Vuong, Q. H. (1989). Likelihood Ratio Tests for Model Selection and Non-Nested Hypotheses. *Econometrica*, 57(2), 307-333. <https://doi.org/10.2307/1912557>

Wicksteed, P. H., & Pareto, V. (1906). Manuale di Economia Politica, con una Introduzione alla Scienza Sociale. *The Economic Journal*, 16(64), 553. <https://doi.org/10.2307/2221479>

wikimédia. (s. d.). File : Pareto distributionPDF.png. Consulté le 25 juin 2020, à l'adresse [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pareto\\_distributionPDF.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pareto_distributionPDF.png)

Williams, J. B. (1938). *The Theory of Investment Value*. Cambridge, United States : Harvard University Press.