

Haute école



BRUSSELS MANAGEMENT SCHOOL

Groupe ICHEC – ECAM - ISFSC

Enseignement de type long de niveau universitaire

Optimisation d'un portefeuille d'actifs : l'analyse des réseaux comme alternative à la théorie moderne du portefeuille de Markowitz ?

Mémoire présenté par :

Adrien De Joncker

Pour l'obtention du diplôme :

Master en sciences commerciales

Année académique 2021-2022

Promoteur :

Sébastien de Valeriola

Boulevard Brand Whitlock 6 – 1150 Bruxelles

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier mes proches pour m'avoir soutenu tout au long de ce parcours, non seulement dans le cadre de ce mémoire, mais également pendant ces quatre années d'études en cours du soir à l'ICHEC, en particulier ma Maman qui a également participé à la relecture de mon travail ainsi que mon beau-père qui m'a apporté un soutien moral et logistique indéfectible. Je remercie également mon ami et mentor, Patrick Van Der Straeten, ancien étudiant HD à l'ICHEC.

Ensuite, j'aimerais remercier le corps professoral pour leur bienveillance et leur attention particulière aux étudiants HD, mais j'aimerais aussi remercier l'Institution pour la qualité de l'enseignement et de nous offrir cette opportunité qui m'a permis, non seulement, de me développer, mais également de faire des rencontres incroyables.

De plus, je voudrais faire un point d'honneur à mon promoteur, M. Sébastien de Valeriola, qui a pu prendre le temps de me guider. Je cite également M. Christophe Desagre pour ses explications et son aide dans le langage de programmation R sans qui le développement aurait été plus ardu.

Je remercie M. Stan Idelsen pour la relecture de mon mémoire et ses critiques constructives.

Je remercie, M. Jérôme Défrade, Directeur financier au CPAS de Bruxelles et M. Grégory Marque, Directeur général au CPAS de Bruxelles pour leur soutien intellectuel, leurs encouragements et leurs précieux conseils qui m'ont permis d'avancer dans l'élaboration de mon mémoire.

Je tiens à remercier M. Xiongfei Jiang qui m'a transféré gracieusement son article scientifique à des fins académiques.

Pour finir, je remercie toutes les personnes qui ont pu m'aider et me soutenir de près ou de loin dans ce défi laborieux, mais enrichissant.

Engagement anti-plagiat

Je soussigné, DE JONCKER Adrien, en Master HD, déclare par la présente que le mémoire ci-joint est exempt de tout plagiat et respecte en tous points le règlement des études en matière d'emprunts, de citations et d'exploitation de sources diverses signé lors de mon inscription à l'ICHEC, ainsi que les instructions et consignes concernant le référencement dans le texte respectant la norme APA, la bibliographie respectant la norme APA, etc. mises à ma disposition sur Moodle.

Sur l'honneur, je certifie avoir pris connaissance des documents précités et je confirme que le Mémoire présenté est original et exempt de tout emprunt à un tiers non-cité correctement.

Dans le cadre de ce dépôt en ligne, la signature consiste en l'introduction du mémoire via la plateforme ICHEC-Student.

Table des matières

Introduction générale	1
Méthodologie et limites.....	3
Partie I : La gestion de portefeuille d'actifs par la théorie moderne du portefeuille	5
1. La théorie de la fonction d'utilité et l'attitude envers le risque	6
a. La rationalité de l'investisseur	6
b. Le Paradoxe de Saint-Pétersbourg	7
c. Les axiomes et les propriétés des fonctions d'utilité espérée	9
d. La critique de la théorie de l'utilité espérée par la finance comportementale	12
e. Le comportement de l'investisseur envers le risque	13
f. Le critère espérance-variance	14
2. Discussion sur les hypothèses.....	17
a. Efficience de marché	17
b. Hypothèses.....	18
c. Les rendements logarithmiques.....	19
d. Les processus stochastiques	19
3. La théorie moderne du portefeuille (TMP)	25
a. Cours de bourse et évaluation d'une action	26
b. Portefeuille à 2 actifs risqués	27
c. Décision d'investissement.....	31
d. Portefeuille à 2 actifs risqués et un actif sans risque.....	33
e. Portefeuille à N actifs risqués.....	39
4. Les limites de la TMP	42
a. Iso-moyennes et iso-variances.....	42
b. La distribution Gaussienne-Laplace	44
c. La myopie de la TMP et autres défauts.....	46
d. Les failles du coefficient de Sharpe	46
5. La gestion de portefeuilles d'actifs	47
Partie II : Sélection d'un portefeuille par l'approche des réseaux	48
1. La théorie des graphes	48
a. Les notations	48
b. Les caractéristiques des réseaux et des nœuds.....	51
c. Les vecteurs propres et les valeurs propres.....	55
d. Les algorithmes de filtration	56

2.	Analyse de la structure des réseaux appliqués aux marchés financiers	57
3.	Optimisation de portefeuilles d'actifs par l'approche des réseaux	64
a.	Méthodologie de l'analyse.....	64
b.	Élaboration des stratégies.....	65
c.	Stratégies appliquées sur le réseau.....	66
d.	Stratégies basée sur la centralité de vecteur propre ($\nu = 0,4$).....	68
e.	Stratégies basée sur la centralité de vecteur propre ($\nu = 0,25$)	74
f.	Conclusion	80
	Conclusion générale	82
	Bibliographie	84
	Compléments bibliographiques.....	87

Liste des figures et tableaux

Figures

Figure 1 : Évolution de l'utilité de la richesse en fonction de la richesse totale.....	10
Figure 2 :Différents type de comportements face au risque.....	14
Figure 3 : Relation sur le plan espérance-variance.....	17
Figure 4 : Marche aléatoire d'une variable aléatoire en fonction de t	21
Figure 5 : Portefeuille composé des actions Solvay et Umicore	30
Figure 6 : Effet de la corrélation entre deux actifs	31
Figure 7 : Rencontre entre la fonction d'utilité de l'investisseur et le lieu des portefeuilles réalisables	32
Figure 8 : Coefficient de Sharpe.....	35
Figure 9 : Portefeuille tangent	37
Figure 10 : Point d'équilibre entre les iso-espérances et la droite de marché.....	38
Figure 11 : Frontière d'efficience.....	40
Figure 12 : Iso-moyennes et iso-variances	43
Figure 13 : Comparaison entre une distribution normale et une leptokurtique	44
Figure 14 : Comparaison entre une distribution normale et une distribution leptokurtique....	45
Figure 15 : Graphe non orienté composé des sommets 1,2 et 3	49
Figure 16 : Promenade, chemin et cycle.....	50
Figure 17: Comparaison de réseaux à différents horizons de temps	58
Figure 18 : Réseau Euronext filtré sur 252 jours.....	60
Figure 19 : Réseau Euronext filtré sur 126 jours.....	60
Figure 20 : Réseau Euronext filtré sur une journée	61
Figure 21 : Représentation d'un portefeuille sous la forme d'un réseau.....	64
Figure 22 : Stratégie MinV sur le réseau complet	67
Figure 23 : Stratégie MV (Re = 10%) sur le réseau complet	67
Figure 24 : Stratégie MV (Re = 20%) sur le réseau complet	68
Figure 25 : Stratégie MinV sur <i>ECH</i> (0,4)	69
Figure 26 : Stratégie MV (Re = 10%) sur <i>ECH</i> (0,4)	70
Figure 27 : Stratégie pondérée sur <i>ECH</i> (0,4)	71
Figure 28 : Stratégie MinV sur <i>ECL</i> (0,4)	72
Figure 29 : Stratégie MV (Re = 10%) sur <i>ECL</i> 0,4	73
Figure 30 : Stratégie pondérée sur <i>ECL</i> 0,4	74

Figure 31 : Stratégie MinV sur <i>ECH0,25</i>	75
Figure 32 : Stratégie MV (Re = 10%) sur <i>ECH0,25</i>	76
Figure 33 : Stratégie pondérée sur <i>ECH0,25</i>	77
Figure 34 : Stratégie MinV sur <i>ECL0,25</i>	78
Figure 35 : Stratégie MV (Re = 10%) sur <i>ECL0,25</i>	79
Figure 36 : Stratégie pondérée sur <i>ECL0,25</i>	80

Tableaux

Tableau 1 : Actions étudiées et leurs Tickers	39
Tableau 2 : Récapitulatif des stratégies (hors MV)	80

Introduction générale

Depuis le papier séminal d'Harry Markowitz dans le « Journal of Finance » en 1952 sur l'allocation de portefeuille, l'encre a beaucoup coulé dans la littérature spécialisée. Son travail, nommé la théorie moderne du portefeuille de Markowitz, a révolutionné le monde de la finance. En effet, ce modèle est toujours d'actualité dans le monde professionnel et est également enseigné dans de nombreuses écoles de commerce. Par ailleurs, certains auteurs ont remis en question sa validité et ont cherché des alternatives telles que le MEDAF, le modèle à facteurs, etc. Cependant, la volonté de l'Homme à comprendre le marché boursier ne date pas d'hier. Bachelier proposa déjà en 1900, un modèle probabiliste pour prévoir les rendements des actifs. La question demeure : comment allouer une pondération efficacement à un portefeuille d'actifs financiers ?

Récemment, la littérature scientifique a élargi les matières appliquées à la finance, notamment grâce à l'apport de mathématiques modernes telles que la théorie des ensembles ou encore l'analyse des réseaux. Le sujet commence à être florissant, mais reste néanmoins limité par rapport à la source abondante d'informations sur les théories classiques.

Les cours de finance pendant mon cursus à l'ICHEC ont attisé ma curiosité sur ce sujet passionnant. Ce dernier est à la confluence des intérêts que je porte à l'informatique, la finance et les mathématiques. En effet, le monde évolue de plus en plus vite, notamment grâce à internet et la mondialisation. Les marchés boursiers ne consistent plus en des salles de marché bondées et inondées de brouhaha, mais des batailles d'algorithme et d'intelligence artificielle. Un gestionnaire ne peut se permettre de mettre de côté des langages de programmation comme Python, R ou SQL. Il doit également s'armer d'un bagage mathématique et statistique suffisant pour comprendre les modèles mathématiques de plus en plus rigoureux.

L'intérêt d'étudier la topologie des réseaux réside dans les propriétés statistiques inattendues des liens entre les éléments d'un réseau qui ne pourraient être mises en lumière autrement. L'analyse des réseaux est une discipline jeune qui confronte un problème ancien, mais ô combien toujours d'actualité. La topologie des réseaux n'est pas exclusive à l'analyse des marchés. Elle est multidisciplinaire, par exemple la physique, la sociologie, l'informatique, etc. Elle aide à comprendre les comportements des individus, les interactions sociales, la propagation d'informations ou de maladie.

Prenons l'exemple de la famille de Médicis à Florence, décrit par Jackson (2008), qui parvint à grimper les échelons sociaux grâce à une habile combinaison de mariage, de relations commerciales et de relations clientélistes, malgré une fortune ainsi qu'une influence politique faible face à l'oligarchie présente à leurs débuts. La topologie des réseaux permet de mettre en

exerce un aspect essentiel de leur succès qui est la position centrale dans le réseau. En effet, la structure d'un réseau affecte les comportements des éléments.

Après avoir appréhendé l'importance de la topologie des réseaux, la question est la suivante : l'analyse des réseaux est-elle une alternative à la théorie moderne du portefeuille de Markowitz dans le cadre de l'optimisation d'un portefeuille d'actifs financiers ?

Finalement, pour aborder le sujet de ce mémoire, celui-ci suivra un fil rouge en définissant progressivement les outils nécessaires à l'élaboration des modèles mathématiques. Le critère espérance-variance de Markowitz ne peut être expliqué sans la notion de fonction d'utilité espérée. À cela s'ajoute une discussion sur les hypothèses afin de simplifier les modèles théoriques sans pour autant oublier les limites rencontrées. Il en va de même pour la seconde partie où l'apport théorique des réseaux est d'abord explicité puis le travail se clôture sur l'exposition des résultats empiriques qui mène à une esquisse de réponse à la question posée ci-dessus.

Méthodologie et limites

Le premier défi rencontré fut la recherche d'un accès à un terminal Bloomberg afin de récolter des données financières sur des actions. La communauté est réticente, à juste titre, de partager l'accès à une personne étrangère à leur organisation. Je me suis donc tourné vers le site internet de Yahoo Finance qui m'a permis de récupérer gratuitement les cours des actions. Néanmoins, l'horizon de temps des données que l'on peut extraire sous format CSV est limité au cours journalier (ouverture, fermeture, le plus haut et le plus bas). Ce mémoire est construit autour de cette limite, alors que les auteurs travaillent en intra journalier jusqu'à des tranches de 19,5 min. Cette limite leur permet d'avoir au moins une transaction réalisée pour chaque action.

Notons également que ce travail suivra la norme d'usage d'intervalle de temps plutôt que par transaction dans le cadre de la modélisation des outils financiers. Cela révèle une réalité à laquelle les chercheurs sont confrontés, le temps est-il continu ? Les bourses ont des heures d'ouverture et de fermeture et l'accroissement des prix d'une action est limité au centième de la monnaie. Cette interrogation permet de prendre du recul par rapport aux modèles théoriques.

Deux autres écueils rencontrés au cours de mes recherches ont été la dimension temporelle distincte des actifs et les taux de change. En effet, l'étude d'actifs sur des marchés géographiquement différents pose problème, car le taux de change entre les monnaies respectives fluctue et peut créer des distorsions importantes, mais le problème le plus important fut la dimension temporelle. Concrètement, les modèles utilisent la corrélation linéaire qui est simple et intuitive, mais qui ne permet pas d'étudier des corrélations asymétriques. Pour ce faire, il faut faire appel à des mathématiques lourdes telles que des copules. À la suite de ces deux problèmes, j'ai dès lors concentré mon étude sur des actions belges cotées sur la bourse Euronext.

L'application R est un langage de programmation focalisé sur l'usage de volume important de données et d'outils statistiques poussés, très appréciés des chercheurs. Les données extraites préalablement de Yahoo Finance ont été manipulées avec R. Malgré des bases en langage de programmation telles que Java ou C#, R possède une syntaxe particulière qui fut également un challenge. Cependant, R m'a aidé à réaliser graphiquement les réseaux, grâce à la librairie « igraph ».

En ce qui concerne la deuxième partie de ce travail, la méthodologie a dû être adaptée à mes besoins étant donné les difficultés énoncées ci-dessus. Les auteurs présentent des observations sur des données intra journalières, il fut nécessaire d'accorder mon modèle aux conditions de mes données.

Pour résumer, j'ai appliqué la matrice des distances métriques à la matrice des corrélations comme décrite par Bonanno, Caldarelli, Lillo, Miccichè, Vanderwalle et Mantegna (2004). Ensuite, cette matrice des distances a été utilisée comme matrice d'adjacence ce qui permet de définir un réseau sous forme matricielle. Subséquemment, un filtre d'arbre couvrant de poids minimal est appliqué à la matrice d'adjacence pour écarter le bruit (les liaisons les moins dotées d'informations). De ce résultat, la centralité de vecteur propre a été calculé pour identifier les nœuds les plus centralisés dans le réseau. Afin de comparer différentes stratégies d'allocation de pondération, un seuil de centralité a été défini arbitrairement pour séparer le réseau en deux sous-ensembles et ainsi parvenir à extraire des informations sur sa structure, car Peralta et Zareei (2016) ont démontré empiriquement que la centralité d'un nœud était liée au risque systémique des actions. Le détail de ces étapes est expliqué dans le point 3.c de la partie II.

Partie I : La gestion de portefeuille d'actifs par la théorie moderne du portefeuille

Début du siècle passé, le monde académique se pencha sur la spéculation des variations de cours de bourse. Bachelier (1900) conclut que les marchés obéissaient aux lois de la probabilité. En effet, ce système dynamique ne peut donc fournir une réponse exacte, mais il est cependant possible d'étudier l'état statique du marché à un moment donné et d'attribuer une probabilité à la fluctuation des cours futurs.

Depuis lors, la littérature scientifique est abondante sur le sujet. Néanmoins, c'est en 1952 que l'histoire de la finance moderne est marquée par la publication de l'article « Portfolio Selection » d'Harry Markowitz dans le Journal of Finance. En effet, selon Chollet (2021), le modèle moyenne-variance de Markowitz est encore largement utilisé de nos jours par les professionnels de la finance.

N'étant pas exempt de toute critique, Markowitz (1992) explique que son modèle a été amélioré, notamment, par Sharpe en 1964 avec la publication de son article sur le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF) qui permet l'évaluation de la prime de risque d'une action ou encore par Black et Scholes qui ont poussé le modèle plus loin dans l'évaluation d'option d'achat et de vente.

Par ailleurs, Alphonse, Desmuliers, Grandin et Levasseur (2020) ont constaté que l'application d'un indice boursier dans le MEDAF donnait des résultats insatisfaisants dans l'évaluation de l'efficience d'un portefeuille et qu'alternativement, des modèles multifacteurs et des modèles fondés sur les caractéristiques ont été développés. En effet, Fontaine et Hillion (1992) avançaient déjà que le modèle d'évaluation par l'arbitrage (MEA) développé par Ross en 1976 devait servir d'alternative au MEDAF, dont le problème de ce dernier résidait dans l'évaluation du portefeuille de marché.

Dans le prolongement de l'amélioration des modèles mathématiques en finances, Geambasu, Sova, Jianu et Geambasu (2013) ont observé que des théories post-modernes du portefeuille, basées sur le risque de baisse (downside risk), ont vu le jour suite aux résultats insuffisants de la théorie moderne du portefeuille de Markowitz qui ne colleraient pas exactement à la réalité.

Finalement, Bonanno, Caldarelli, Lillo, Miccichè, Vandewalle et Mantegna (2004) ont assimilé les marchés financiers à la topologie des réseaux où un actif financier serait un sommet et les liens entre eux seraient représentés par leurs corrélations. Attisés par le vent de fraîcheur

qu'apportent leurs travaux dans le domaine de la finance, Peralta et Zareei (2016) creusent plus profondément l'approche des réseaux dans la sélection de portefeuilles.

Dans cette partie, nous élaborons un portefeuille d'actions belges sous la théorie moderne du portefeuille (TMP) de Markowitz. Pour ce faire, nous développerons la théorie de l'utilité de la richesse puis nous appliquerons la TMP à un cas concret. Ce chapitre sera clôturé par un commentaire sur les limites de ce modèle.

1. La théorie de la fonction d'utilité et l'attitude envers le risque

Tout d'abord, afin d'appréhender le modèle de la théorie moderne du portefeuille, il est nécessaire de comprendre la logique sous-jacente, soit le concept de la fonction d'utilité de la richesse qui habite un investisseur dans un environnement incertain. En d'autres mots, quelles sont ses préférences vis-à-vis de la richesse et quelle est son attitude face au risque ?

a. La rationalité de l'investisseur

En effet, d'après Aftalion, Poncet et Portrait (1998), le décideur se trouve face à une multitude de possibilités d'investissement dont les taux de rentabilité ont un caractère aléatoire. À chaque valeur future est associée une probabilité, p_i . Par conséquent, il est possible de définir l'espérance mathématique qui se décompose sous la somme des rentabilités pondérées par leurs probabilités :

$$E(R) = \sum_i p_i r_i \quad (1.1.1)$$

Où r_i représente le taux de rentabilité d'un actif i .

Selon Devolder, Fox et Vaguener (2018), l'axiome de rationalité, également nommé l'axiome de non satiété, de John von Neumann et Oskar Morgenstern implique que chaque individu a une préférence pour une richesse plus importante et cherchera donc à maximiser sa satisfaction. Il est tout à fait raisonnable de penser qu'un investisseur rationnel choisira un placement dont l'espérance mathématique de rentabilité est la plus élevée.

Néanmoins, il ne s'agit pas de l'unique critère de décision de l'investisseur. Le paradoxe de Saint-Pétersbourg nous permettra d'illustrer l'importance du risque dans la prise de décision.

b. Le Paradoxe de Saint-Pétersbourg

Estran, Harb et Veryzhenko (2017) ainsi que Cayatte (2009) exposent le Paradoxe de Saint-Pétersbourg énoncé par Nicolas Bernoulli au début du 18^e siècle. Une partie de la communauté scientifique telle qu’Aftalion et al. (1998) s’accordent à dire que Daniel Bernoulli était à l’origine de ce jeu.

La règle est simple, une pièce non-truquée est lancée autant de fois que nécessaire jusqu’à l’obtention du côté face. Le joueur gagne alors l’équivalent 2^n ducats pour n tirages. Par exemple, si la face sort au troisième lancé, alors le joueur obtient 8 ducats. La probabilité que face apparaisse au n ième tirage équivaut à $\frac{1}{2^n}$. L’espérance de gain peut se formuler comme suit :

$$E(Gain) = E(R) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) 2^n = 1 + 1 + 1 + \dots = +\infty \quad (1.1.2)$$

Il s’agit de l’application de l’équation (1.1.1) qui mène à une série arithmétique de limite infinie.

La question suivante est alors posée au joueur : « Quelle somme êtes-vous prêt à payer pour participer à ce jeu ? ». Le jeu présentant une espérance de gain infinie, le joueur devrait miser l’ensemble de sa fortune. Cependant, malgré cette espérance de gain infinie, personne n’accepte de payer un montant élevé, c’est-à-dire pas plus d’une dizaine de ducats. Cayatte (2009) traduisit mathématiquement cette évidence :

- Un joueur ne participant pas à ce jeu verra sa richesse finale W égale à sa richesse initiale w , soit $W = w$.
- Tandis qu’un joueur y participant verra sa richesse finale devenir $W = w - b + 2^n$, où b est le droit d’entrée. Il acceptera de payer un prix b tel que $U(w - b + 2^n) \geq U(w)$ où la fonction d’utilité $U(w)$, autrement dit l’utilité de la richesse w pour le joueur, est naïvement assimilée à l’espérance mathématique du jeu puisqu’une espérance plus importante apportera une plus grande satisfaction selon l’axiome de non-satiété vu au point précédent (cf. supra p.6).

Par conséquent, la fonction d’utilité U a pour valeur l’espérance de la richesse, notée $U(W) = E(W)$. Cette espérance de la richesse peut être finie, infinie dénombrable ou infinie indénombrable. En partant de la relation (1.1), leurs espérances se retranscrivent respectivement de la manière suivante, $U(W) = \sum_{i=1}^m p_i r_i$, $U(W) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i r_i$ et $U(W) = \int_a^b f(x) dx$.

Revenons au participant du jeu et prenons l’espérance des gains :

$$E(w - b + 2^n) \geq E(w)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow w - b + E(2^n) \geq E(w) \\ &\Leftrightarrow b \leq E(2^n) \end{aligned}$$

Donc n'importe quel prix inférieur ou égal à l'espérance des gains ($+\infty$) devrait être accepté.

Par cet exemple, nous comprenons que l'investisseur rationnel et parfaitement informé ne prendra pas en compte uniquement l'espérance mathématique, mais également la notion du risque. En finance, cette dernière est mesurée par la variance des rendements, notée $\sigma^2(R)$, d'après Aftalion et al. (1998). Elle se calcule comme suit :

$$\sigma^2(R) = \sum_i [r_i - E(R)]^2 p_i \quad (1.1.3)$$

Estran et al. (2017) expliquent que Daniel Bernoulli proposa une solution au Paradoxe de Saint-Pétersbourg en transformant les gains monétaires en un niveau de satisfaction grâce à une fonction logarithmique de l'utilité de la richesse, $U(R)$. Les économistes utilisent cette fonction d'utilité pour simuler mathématiquement le comportement des individus.

Prenons une fonction logarithme népérien pour définir le comportement du joueur. Celle-ci sera donc croissante et concave. La valeur d'espérance du logarithme des gains vaut :

$$U(R) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) \ln(2^n) = 2 \ln(2) = \ln(4) \approx 1,38629..$$

Vaguener (2011) nous explicite le développement de la manière suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) \ln(2^n) = \ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad (1.1.4)$$

Pour rappel la somme d'une série géométrique de raison q (pour $q \neq 1$) est égale à :

$$S_n = a \sum_{i=1}^n q^i = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (1.1.5)$$

Posons $f(x)$, une série géométrique infinie dont $x \in]0,1[$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^i + \dots \quad (1.1.6)$$

Sa dérivée correspond à :

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + ix^{i-1} + \dots \quad (1.1.7)$$

Multiplions x par la formule (1.1.7) :

$$xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + ix^i + \cdots \quad (1.1.8)$$

Posons $x = 1/2$:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2^2} + 3\frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{i}{2^i} + \cdots \quad (1.1.9)$$

Dès lors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2 \quad (1.1.10)$$

Par conséquent :

$$U(R) = 2 \ln(2) \approx 1,38629.. \quad (1.1.11)$$

Dans ce cas, le joueur paie une somme finie équivalente à 4 ducats ce qui est en adéquation avec la réalité étant donné que la probabilité de voir apparaître le côté face au premier lancé est fort grande, soit une chance sur deux. En effet, d'après Aftalion et al. (1998), les joueurs ne participeront pas à un jeu dont l'espérance d'utilité, soit $U(R) \approx 1,38629..$ est inférieure à l'utilité du droit d'entrée, soit $\ln(x) = 1,38629.. \Leftrightarrow x = \exp(1,38629..) = 4$. Cette conclusion corrobore le commentaire de l'équation (1.3).

Finalement, Cayatte (2009) formule les fonctions d'utilité espérée comme l'espérance de l'utilité de la richesse, notée $U(W) = E(u(w))$. La fonction u transforme la richesse w en une autre variable aléatoire $u(W)$. La fonction d'utilité espérée peut prendre des valeurs fini, infini dénombrable et infini indénombrable respectivement notés comme suit, $U(W) = \sum_{i=1}^m p_i u(r_i)$, $U(W) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i u(r_i)$ et $U(W) = \int_a^b f(x)u(r_i)dx$.

c. Les axiomes et les propriétés des fonctions d'utilité espérée

Formalisons la fonction logarithme népérien de l'utilité espérée de la richesse pour ajuster la perception d'un individu face à la valeur de la richesse. Cette fonction possède les propriétés suivantes :

- a) Elle est croissante, car le niveau de satisfaction augmente avec la richesse. Si $R_2 > R_1$, alors $U(R_2) > U(R_1) \rightarrow$ Sa dérivée première est donc positive : $U'(R) > 0$.
- b) Elle est concave, car l'utilité marginale est décroissante, c'est-à-dire que l'utilité de chaque euro supplémentaire diminue avec l'augmentation totale de la richesse. Pour une

augmentation de la richesse ΔR et si $R_2 > R_1$, alors $U(R_2 + \Delta R) - U(R_2) < U(R_1 + \Delta R) - U(R_1)$ ➔ Sa dérivée seconde est alors négative : $U''(R) < 0$.

La figure 1 (cf. infra « Figure 1 »), ci-dessous, représente graphiquement la fonction logarithmique de l'utilité de la richesse et permet de mettre en exergue les propriétés citées plus haut.

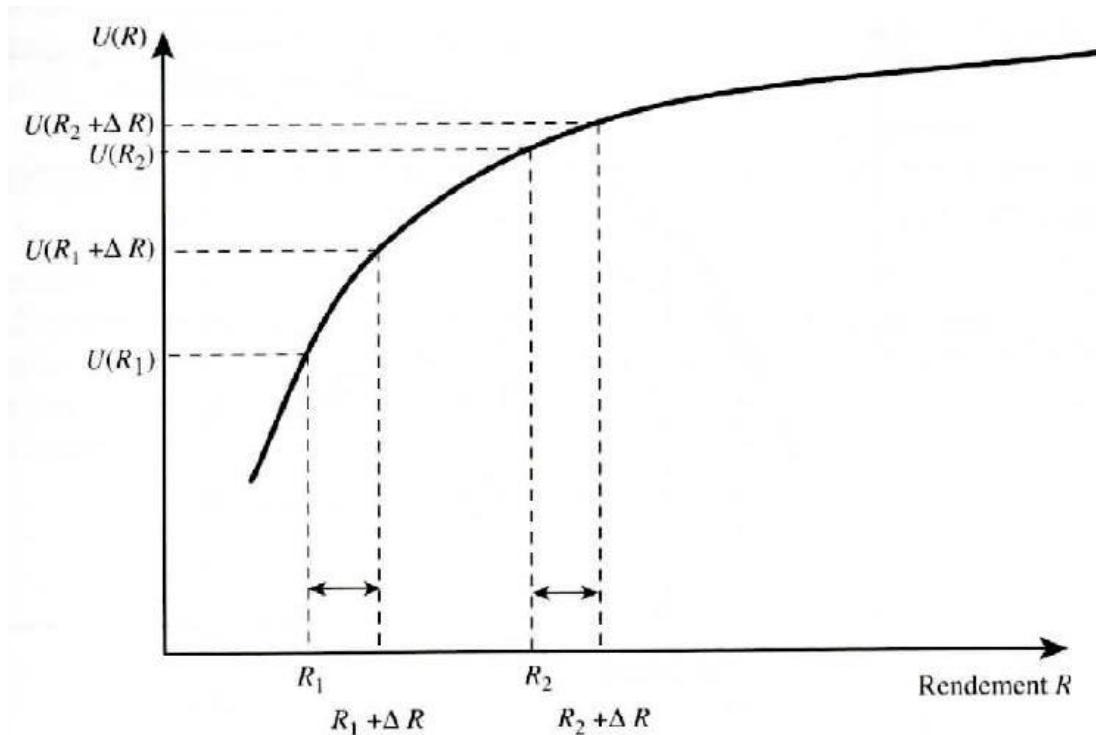


Figure 1 : Évolution de l'utilité de la richesse en fonction de la richesse totale

Source : Devolder, P., Fox, M. et Vaguener, F. (2018). *Mathématiques financières* (3^e éd). Montreuil : Pearson.

Devolder et al. (2018) affirment qu'il existe d'autres types de fonction d'utilité telles que la quadratique, l'exponentielle négative et la puissance. Nous verrons également au point suivant 1.e (cf. infra p.13) que dans le comportement de l'investisseur envers le risque, il existe différents types de profil d'investisseurs.

À cela s'ajoute le travail de von Neumann et Morgenstern (1953) qui élaborèrent les axiomes de la notion d'utilité dans leur livre intitulé Theory of games and Economics behavior qui ont fondé les piliers de la finance moderne.

Le système U , constitué des évènements u, v, w, \dots , sert de point de départ. Dans ce système, les relations sont définies par $u > v$ et une probabilité $\alpha \in]0,1[$.

Estran et al. (2017) classent ces axiomes de la manière suivante :

i. Comparabilité

$u > v$ signifie que u est préférable à v . Il est à noter que les relations entre u et v ne peuvent être que plus grandes ($u > v$), plus petites ($u < v$) ou égales ($u = v$) ce qui implique que l'individu est capable de définir ses préférences.

ii. Transitivité

$u > v, v > w$ alors $u > w$. Il s'agit de la rationalité parfaite de l'individu. Si u est préféré à v et v est préféré à w , alors u est préféré à w .

iii. Indépendance

$\alpha u + (1 - \alpha)v = (1 - \alpha)v + \alpha u$ montre que l'ordre n'a pas d'importance étant donné que ce sont des évènements exclusifs.

iv. Continuité

Selon von Neumann et Morgenstern (1953), $u < w < v$ implique l'existence d'une probabilité $\alpha \in]0,1[$ telle que : $\alpha u + (1 - \alpha)v < w$. Si v est préféré à w qui est lui-même préféré à u , alors la combinaison d'une probabilité α à u avec une probabilité de $(1 - \alpha)$ à v n'altérera pas la préférence vis-à-vis de w pour une probabilité $(1 - \alpha)$ assez faible.

Ceci est également vrai pour le postulat $v < w < u$ impliquant $w < \alpha u + (1 - \alpha)v$ qui correspond à la dualité du cas précédent avec $(1 - \alpha)$ suffisamment élevé. Cependant, Estran et al. (2017) reformule l'axiome de continuité de la sorte, $\beta v + (1 - \beta)u < w < \alpha v + (1 - \alpha)u$ où $\alpha, \beta \in [0,1]$. Cet axiome est important, car il permet la dérivation des courbes d'indifférence que nous verrons au point f (cf. infra p.14).

Lorsque ces quatre axiomes sont admis, on peut définir la fonction d'utilité $U | u > v \Leftrightarrow U(u) > U(v)$ d'un individu cherchant à maximiser sa satisfaction.

Cerqueti et Lupi (2016) énoncent également les axiomes de l'utilité espérée retravaillés par Ambrahamsen et Aven. Aux axiomes précédent s'ajoutent donc :

v. *Monotonicité*

Si deux loteries u et w ont comme seuls résultats possibles a et b avec $a > b$, alors u est préféré à w si et seulement si $P(u = a) > P(w = a)$.

vi. *Probabilités composées*

Pour une loterie u dont les résultats sont également des loteries w et v avec une probabilité α tel que : $u = \alpha w + (1 - \alpha)v$, alors la loterie u est indifférente aux résultats des loteries simples w et v lorsque le produit des probabilités est réalisé tel que : $u \sim \alpha w + (1 - \alpha)v \Leftrightarrow u \sim \alpha(\beta q + (1 - \beta)r) + (1 - \alpha)(\gamma s + (1 - \gamma)t)$ où w a pour résultat q avec une probabilité β et r avec une probabilité $(1 - \beta)$ et où v a pour résultat s avec une probabilité γ et t avec une probabilité $(1 - \gamma)$. Par conséquent, $u \sim \alpha\beta q + \alpha(1 - \beta)r + (1 - \alpha)\gamma s + (1 - \alpha)(1 - \gamma)t$.

d. La critique de la théorie de l'utilité espérée par la finance comportementale

Cayatte (2009) conclut que si ces axiomes sont acceptés, alors il est supposé que les préférences du décideur sont bien représentées par les fonctions d'utilité espérée, $U(R)$. Par ailleurs, von Neumann et Morgenstern (1953) expliquent que leurs axiomes sont partiellement subjectifs afin de satisfaire certains objectifs, mais que les théorèmes sous-jacents étaient précis et objectifs. Leur but est de rendre leurs axiomes les plus simples et les plus intuitifs possibles, tout en gardant une rigueur mathématique.

En outre, d'après Geambasu et al. (2013) la théorie de l'utilité espérée a été critiquée en finance comportementale par la théorie des perspectives de Kahneman et Tversky qui avançait que l'investisseur préférât le confort émotionnel plutôt que la recherche de l'optimisation de leur utilité économique. L'investisseur se fixe un rendement minimum qu'il perçoit comme un confort émotionnel et dès lors, il considère un rendement plus faible comme une perte et un rendement plus élevé comme une bonne surprise.

De plus, conformément au travail de Kahneman et Tversky (1979), l'axiome d'indépendance nommé également axiome de substitution et l'utilité $U(0) = 0$ ont été empiriquement utilisés pour prouver qu'ils ne suivaient pas les résultats escomptés par la théorie de l'utilité espérée. Ceci est dû à l'effet de certitude qui énonce qu'un individu préfère un évènement certain à un évènement probable. Par exemple, un individu préférera une loterie dont la probabilité est la plus élevée, toutefois lorsqu'elle est minuscule (~ 0.001), le choix est porté sur le gain le plus élevé. Ce phénomène n'est pas capturé par la théorie de l'utilité espérée. Par ailleurs, lorsqu'on introduit la probabilité de pertes, l'ordre des préférences de choix est inversé, ce phénomène est appelé l'effet de réflexion. Ils relèvent également l'effet d'isolation qui montre qu'un individu

se concentre uniquement sur les différences entre les composants de loteries plutôt que sur leurs ressemblances ce qui implique des inconsistances dans les préférences des individus.

Finalement, on comprend que la théorie de l'utilité a été remise en question à cause de certaines inadéquations par rapport à la réalité. Cependant, il reste le modèle le plus utilisé dans le monde de la finance pour sa simplicité.

e. Le comportement de l'investisseur envers le risque

À partir de la fonction d'utilité espérée, trois comportements différents peuvent être discernés.

i. *L'aversion au risque*

Le cas présenté au point 1.c (cf. supra p.9) représente une personne refusant la prise de risque. Selon Aftalion et al. (1998), la majorité des individus possèdent une aversion au risque. Pour rappel, la courbe de la fonction logarithme de l'utilité espérée du rendement R est croissante et sa pente est décroissante ($U'(R) > 0$ et $U''(R) < 0$).

ii. *Le risquophile*

L'individu ayant le goût du risque penchera pour le rendement le plus élevé aux dépens d'un taux de risque accru. Sa fonction d'utilité prend la forme d'une exponentielle croissante dont la pente est également croissante. Dès lors, sa dérivée seconde est positive : $U'(R) > 0$ et $U''(R) > 0$.

iii. *La neutralité devant le risque*

Un individu optant pour une position neutre face au risque aura comme profil une fonction linéaire de l'utilité. Cette dernière est croissante et sa pente est constante (C), par conséquent sa dérivée seconde est nulle : $U'(R) = C > 0$ et $U''(R) = 0$.

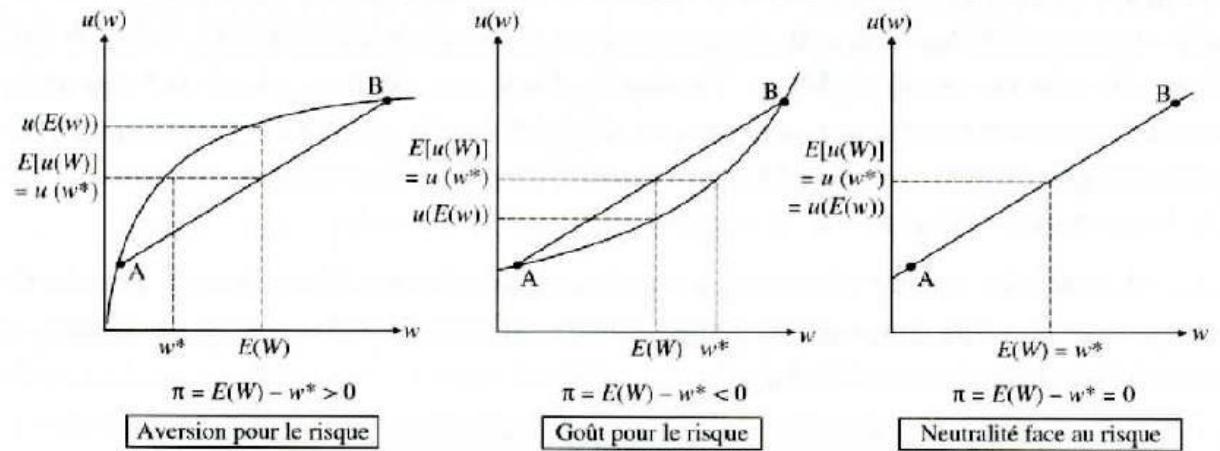


Figure 2 :Différents type de comportements face au risque

Source :Cayatte, J. (2009). *Microéconomie de l'incertitude* (2^e éd). Bruxelles : De Boeck.

Sur la figure 2 (cf. supra « Figure 2 »), nous retrouvons la notion de prime de risque ou risque premium qui n'est autre que la différence entre le rendement d'un actif risqué et le rendement d'un actif sans risque ou encore l'espérance de la richesse diminuée de la richesse actuelle, soit $E(W) - w^*$. Chaque profil est détaillé plus haut. Une personne averse au risque présente une fonction d'utilité espérée donnée par une courbe concave (graphique de gauche), le risquophile est habité par une courbe convexe (graphique au centre) et la neutralité face au risque est une droite croissante (graphique à droite).

Il est à noter que ces profils peuvent évoluer au cours du temps et en fonction de la situation ainsi que selon les individus.

f. Le critère espérance-variance

Suite à la discussion sur le Paradoxe de Saint-Pétersbourg, il a été constaté que l'investisseur ne se basait pas uniquement sur les rendements, mais également sur les risques des actifs. Comme mentionné au point b (cf. infra p.7), le risque est souvent admis comme étant la variance (voir équation 1.1.3) ou encore l'écart-type des rendements, qui est la racine carrée de la variance et dont la notation est la suivante :

$$EC(R) = \sigma(R) = \sqrt{\sigma^2(R)} = \sqrt{\sum_i [r_i - E(R)]^2 p_i} \quad (1.1.13)$$

Dès lors, selon Aftalion et al. (1998), dans la théorie moderne du portefeuille, l'investisseur décide sur base des deux premiers moments des distributions des rentabilités, c'est-à-dire

l'espérance mathématique et la variance. Cela mène à deux hypothèses. La première consiste en la supposition qu'au moins le premier moment est distribué selon la loi normale. La deuxième suppose que les fonctions d'utilité sont quadratiques, vu qu'elles sont une bonne approximation locale d'autres fonctions malgré qu'elles ne satisfassent pas les axiomes de rationalité de von Neumann et Morgenstern.

En outre, Devolder et al. (2018) démarrent leur raisonnement à partir d'une fonction logarithmique et ses dérivées pour exprimer le comportement d'un investisseur averse au risque tels que :

$$U(R) = \ln(1 + R) \quad (1.1.14)$$

$$\frac{dU(R)}{dR} = \frac{1}{(1 + R)} \quad (1.1.15)$$

$$\frac{d^2U(R)}{dR^2} = \frac{-1}{(1 + R)^2} \quad (1.1.16)$$

Pour un même niveau de satisfaction, l'investisseur s'attendra à un rendement plus élevé pour un risque accru. L'objectif est de modéliser la relation entre $E(R)$ et $\sigma(R)$ afin de comprendre le comportement de l'investisseur.

Tout d'abord, rappelons les formules de développement en série de Taylor et de MacLaurin.

La série de Taylor :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i \quad (1.1.17)$$

Et la série de Mac Laurin qui est un cas particulier de Taylor, où $a = 0$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i \quad (1.1.18)$$

En développant la fonction d'utilité $U(R) = \ln(1 + R)$ en série Mac Laurin, on obtient :

$$U(R) = \ln(1 + R) = R - \frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4} + \dots + \varphi(.) \quad (1.1.19)$$

Avec $|R| < 1$. En prenant l'espérance mathématique et en limitant au deuxième ordre de la formule 1.1.19, on obtient :

$$E(U(R)) \cong E(R) - \frac{1}{2}E(R^2) \quad (1.1.20)$$

Pour rappel le moment d'ordre 2 par rapport à $E(R)$ est :

$$\sigma^2(R) = E(R^2) - E^2(R) \quad (1.1.21)$$

$$\Leftrightarrow E(R^2) = \sigma^2(R) + E^2(R) \quad (1.1.22)$$

On remplace $E(R^2)$ dans l'expression (1.1.20) et on obtient :

$$E(U(R)) \cong E(R) - \frac{1}{2}[\sigma^2(R) + E^2(R)] \quad (1.1.23)$$

Pour appréhender la relation entre $E(R)$ et $\sigma(R)$ tout en conservant un niveau de satisfaction identique, nommée courbe d'iso-espérance, il est nécessaire de prendre la différentielle totale et de poser $dE(U(R)) = 0$.

$$dE(U(R)) \cong \frac{\partial E(U(R))}{\partial E(R)} dE(R) + \frac{\partial E(U(R))}{\partial \sigma(R)} d\sigma(R) \quad (1.1.24)$$

$$(1 - E(R))d(E(R)) - \sigma(R)d\sigma(R) = 0 \quad (1.1.25)$$

L'expression 1.1.25 représente une courbe d'iso-espérance d'utilité. En écrivant la dérivée de $E(R)$ par rapport à $\sigma(R)$ on a :

$$\frac{dE(R)}{d\sigma(R)} = \frac{\sigma(R)}{1 - E(R)} > 0 \quad (1.1.26)$$

$$\frac{d^2E(R)}{d\sigma(R)^2} = \frac{1}{(1 - E(R))^2} > 0 \quad (1.1.27)$$

On constate que ses dérivées sont positives, ce qui implique qu'un accroissement du risque nécessite une augmentation du rendement et que $E(R)$ est marginalement croissant. Dès lors, l'augmentation constante du risque $\sigma(R)$ crée une perte d'espérance d'utilité (cf. infra relation (1.1.23)) qui doit être supplante par l'augmentation constante de $E(R)$ (cf. infra relation 1.1.26). La courbe d'iso-espérance d'utilité est donc convexe, c'est-à-dire, orientée vers le haut comme représentée dans la figure 3. La courbe la plus haute vers la gauche représente l'utilité la plus élevée, $E(U(R))_3 > E(U(R))_2 > \dots$.

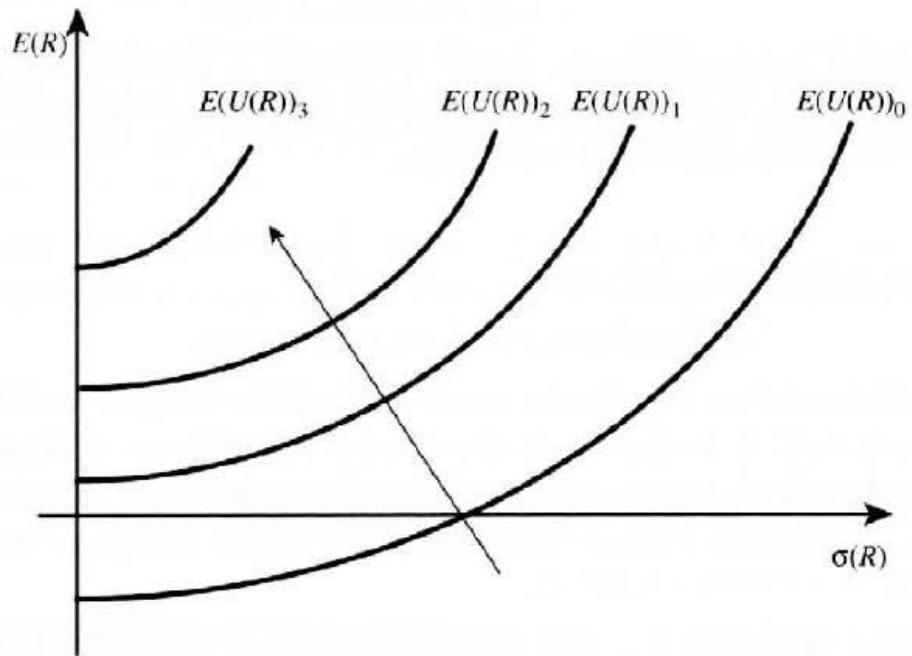


Figure 3 : Relation sur le plan espérance-variance

Source : Devolder, P., Fox, M. et Vaguener, F. (2018). *Mathématiques financières* (3^e éd). Montreuil : Pearson.

Cette démonstration dans un espace $(\sigma(R); E(R))$ sert de terreau dans l’élaboration d’un portefeuille sous la théorie moderne du portefeuille selon Markowitz.

2. Discussion sur les hypothèses

Avant de plonger dans le modèle de Markowitz, récapitulons et posons certaines hypothèses. À commencer par l’efficience de marché, puis les rendements logarithmiques et finalement la présomption que les variables aléatoires suivent un mouvement brownien géométrique.

a. Efficience de marché

Selon Aftalion et al. (1998), le marché devrait, au niveau macro, être optimale et allouer les ressources là où elles sont nécessaires. D’un point de vue micro, l’investisseur utilisera plutôt l’analyse technique, basée sur les tendances et les cycles des marchés financiers, s’il ne croit pas en l’efficience des marchés ou lorsqu’il profite de la présence d’opportunités d’arbitrage. Dans ce cas, il pourrait battre les marchés comme on dit dans le jargon. Selon D’Hondt et Platten (2015), une opportunité d’arbitrage apparaît lorsqu’il est possible de réaliser un profit

sans prendre de risque et sans apporter de fonds initialement. Cela pourrait être le cas dans le cours des monnaies. Cependant, d'après Chaboud, Chiquoine, Hjalmarsson et Vega (2014), les traders haute fréquence diminuent ces opportunités d'arbitrage sur le marché. En effet, grâce aux algorithmes et à l'intelligence artificielle travaillant en millième de seconde, voire moins, réussissent à les capturer. Dès lors, les marchés sont quasiment instantanément à l'équilibre.

Néanmoins, Aftalion et al. (1998) et Alphonse et al. (2020) s'accordent à dire que les études empiriques prouvent que les professionnels ne réalisent pas de gains sur le long terme, d'autant plus qu'il faut prendre en compte les frais de gestion qui viennent rogner la marge. Leurs résultats seraient donc plutôt issus de la chance. À l'opposé, d'après Kirkpatrick et Dahlquist (2011), les études empiriques montrent que les nouvelles informations sur le marché ne sont pas diffusées immédiatement et que les acteurs ne les utilisent pas toujours rationnellement. Néanmoins, ils en conviennent que les acteurs informés et rationnels saisiront l'opportunité d'arbitrage qui se présente ce qui, par conséquent, remettrait le marché à l'équilibre. Concernant les résultats de l'analyse technique, les auteurs s'appuient sur 92 études dont 58 révèlent des résultats positifs.

Quant à l'efficience de marché, celle-ci est définie sous trois formes, selon Alphonse et al. (2020) :

- 1) Faible : lorsque les cours intègrent les données historiques.
- 2) Semi-forte : lorsque les cours incorporent les données historiques et les informations futures et publiques.
- 3) Forte : lorsque les cours assimilent les données passées, les informations futures, publiques et privées.

Aux dires d'Aftalion et al. (1998), la forme d'efficience forte a été la plus remise en question dans la littérature scientifique, notamment empiriquement. Cependant, on doit être convaincu de l'efficience d'un marché, du moins sous la forme faible, pour considérer les cours comme une marche aléatoire telle que décrite par Bachelier dans son ouvrage en 1900 qui propose un modèle probabiliste. C'est donc vers la composition d'un portefeuille efficient, par exemple au sens de Markowitz, qu'un investisseur soucieux de l'efficience de marché se tournera.

b. Hypothèses

Il est nécessaire de définir des hypothèses pour éviter de s'encombrer de cas particuliers et d'inconsistances dans la conception de ce travail.

- 1) Un acteur ne peut influencer le prix d'un actif sur le marché. Cela se réfère à l'atomicité des agents dans un marché en concurrence pure et parfaite.

- 2) Les dividendes d'une action ne sont pas pris en compte, de même que les frais de gestion. Cela s'avère d'ailleurs logique étant donné que nous ne connaissons pas le taux de distribution de dividende de chaque entreprise étudiée.
- 3) Les rendements sont assimilés à des variables aléatoires dont leurs logarithmes sont calibrés par un mouvement brownien géométrique. Ces variables aléatoires sont également indépendantes et identiquement distribuées. De plus, elles sont considérées en temps continu.
- 4) La dépendance entre deux actifs est caractérisée par leur corrélation linéaire dont les limites sont atteintes lorsque leur dépendance devient asymétrique. Il est possible de travailler avec des modèles mathématiques beaucoup plus lourds pour modéliser ce genre de relation, notamment par l'utilisation des copules. Selon Hull (2017), une copule définit la structure de corrélation entre deux variables sur base de leurs distributions marginales. Ce mémoire se contentera de mesurer la dépendance entre deux actif par leur corrélation linéaire.

c. Les rendements logarithmiques

Les rendements logarithmiques ont été choisis comme méthode d'évaluation des rendements, car leurs propriétés statistiques sont très intéressantes. Selon Quantivity (2021), si l'on considère que les rendements suivent une distribution log normale, alors la distribution des rendements logarithmiques suit une normale. De plus, lorsqu'on considère plusieurs périodes, la somme de distribution normale donne une distribution normale, alors que dans le cas des rendements simples, leur multiplication ne mène pas à une distribution normale. À cela s'ajoute la facilité de dérivation et d'intégration de l'exponentielle qui sera très utile dans les processus stochastiques et plus particulièrement dans les mouvements browniens géométriques. Cependant, d'après Fan (2019), sur un horizon de temps grand, les rendements simples sont systématiquement plus grands que les rendements logarithmiques. Notons que les rendements logarithmiques sont également appelés les rendements en composition continue dus à leur lien étroit avec les taux composés.

Au-delà de l'aspect technique, selon le théorème central limite, pour un très grand nombre, la distribution suivra une normale, même si, comme nous le verrons (cf. infra p.44), les données empiriques s'apparentent à une distribution leptokurtique. Pour rappel, il est à noter que les rendements logarithmiques sont indépendants et identiquement distribués (iid).

d. Les processus stochastiques

Afin de déboucher sur l'hypothèse que les rendements sont calibrés par des mouvements browniens géométriques, nous introduirons l'intuition des calculs stochastiques dans les rendements par l'efficience des marchés, puis par une promenade aléatoire, ensuite par la

convergence d'un temps infinitésimal et finalement par les propriétés des processus stochastiques.

i. *Intuition par l'efficience des marchés*

Selon Devolder (2011), les processus stochastiques sont une branche des probabilités en statistique. Il s'agit plus particulièrement de l'étude des phénomènes aléatoires dans des séries chronologiques. D'après Fan (2019), comme le marché est efficient et que tout le monde a accès à l'information, les rendements peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$r_t = \mu + \varepsilon_t \quad (1.2.1)$$

Où μ est le rendement espéré qui est constant et $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ est un processus de bruit blanc, assimilé à l'arrivée de nouvelles informations sur le marché qui va distordre la valeur du rendement. ε_t est considéré iid. Même si de manière empirique, la restriction iid est mise à l'épreuve, nous conservons cette hypothèse dans le cadre de ce travail.

En prenant les rendements logarithmiques ($r_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$) de la relation (1.2.1), nous obtenons :

$$\log P_t = \mu + \log P_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1.2.2)$$

Où les rendements forment une promenade aléatoire et dont les prix forment une promenade aléatoire géométrique, si ε_t est iid. Comme Bachelier (1900) l'a précisé dans ses travaux, les rendements suivraient une promenade aléatoire.

Pour arriver à l'intuition des calculs stochastiques appliqués aux rendements d'actifs, partons du cadre déterministe dont Devolder (2011) nous explique les tenants et aboutissants. Soit une capitalisation annuelle en composition continue à taux variable s'écrit de la manière suivante :

$$S(n) = S(0) \prod_{k=1}^n e^{\delta_k} \quad (1.2.3)$$

Où δ est le taux d'intérêt instantané à l'instant k . Dans le cadre stochastique, la relation (1.2.3) devient :

$$S(n) = S(0) \prod_{k=1}^n e^{\chi_k} \quad (1.2.4)$$

Où χ est une suite de variable aléatoire iid.

ii. Promenade aléatoire

Définissons d'abord le concept de promenade aléatoire dans le cadre discret basé sur le modèle binomial par le travail de Devolder et al. (2018). Une promenade aléatoire consiste en un déplacement d'une distance Δx avec deux possibilités équiprobables (p et $(p - 1)$) après n pas chacun d'une période de temps Δt . La figure 4 illustre une marche aléatoire d'une variable aléatoire X en fonction du temps t . Représentons la valeur de ce déplacement par un

accroissement d'une unité dans un sens ou dans l'autre, soit $\Psi = \begin{cases} 1 & \text{avec } p = \frac{1}{2} \\ -1 & \text{avec } (1-p) = \frac{1}{2}. \end{cases}$

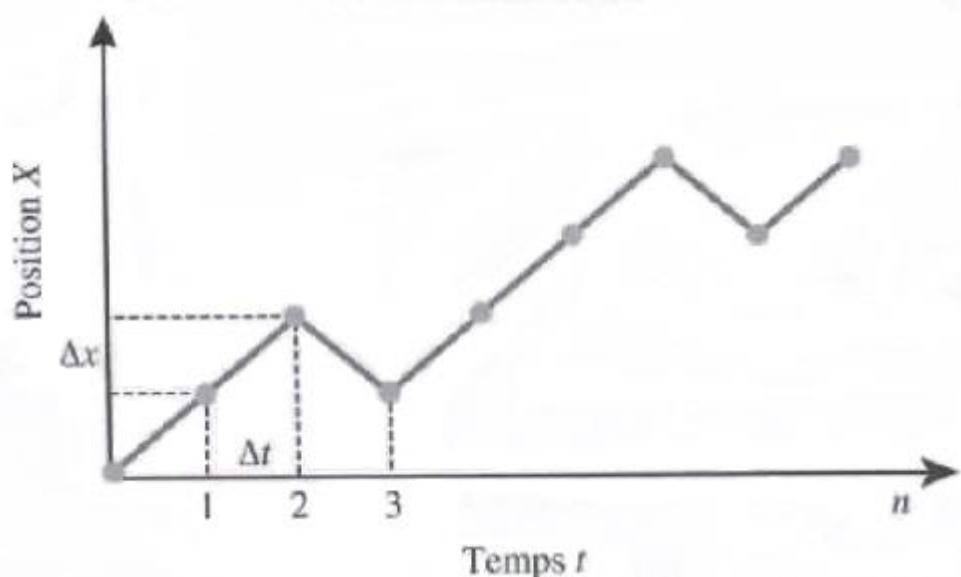


Figure 4 : Marche aléatoire d'une variable aléatoire en fonction de t

Source :Devolder, P., Fox, M. et Vaguener, F. (2018). *Mathématiques financières* (3^e éd). Montreuil : Pearson.

iii. Cadre du calcul stochastique

Pour travailler avec les variables aléatoires, il est nécessaire de définir un espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) , où Ω est un ensemble et \mathcal{F} est une σ -algèbre sur Ω . Il faut également une mesure de

probabilité $P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$. Le triplet forme un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) qui est le cadre du stochastique.

En prenant les rendements logarithmiques cumulés de la relation (1.2.4), nous obtenons, selon Devolder (2011), une promenade en temps discret :

$$\log \left(\frac{S(n)}{S(0)} \right) = \delta \cdot n + \sigma \sum_{i=1}^n \Psi_i \quad (1.2.5)$$

Où $\delta \cdot n$ est la tendance déterministe et $\sigma \sum_{i=1}^n \Psi_i$ est le bruit. σ est la volatilité et $\sum_{i=1}^n \Psi_i = W(n)$ est un processus stochastique.

Par hypothèse, nous travaillerons en temps continu, même si, selon Hull (2017), par essence, les variations des prix ne peuvent se faire que pendant l'ouverture des bourses et par tranche minimum de centimes. Dès lors, nous faisons converger le processus en faisant tendre la valeur Δt vers zéro. Passons les détails de calcul qui sortent du cadre de ce travail. Selon Devolder et al. (2018), le processus en temps continu se réécrit de la sorte :

$$S(t) = \mu t + \sigma W(t) \quad (1.2.6)$$

Où μ est appelé le drift et définit par l'espérance des rendements, la volatilité σ est caractérisée par l'écart-type des variables aléatoires et $W(t) \sim \sqrt{t} \cdot N(0,1)$. La variable aléatoire suit donc une distribution normale et W est appelée le processus de Wiener ou encore mouvement brownien. Dès lors, les accroissements de valeur varient proportionnellement à σ .

iv. Trajectoires et convergences

Ensuite, la variation de la variable aléatoire dans le temps forme des trajectoires qui sont continues, mais malencontreusement bornées. Elles ne sont pas donc dérivables et ne permettent pas de trouver leurs limites. Il faut donc passer par des convergences dont Wiersema (2008) en dénombre quatre : la convergence presque sûre, la convergence quadratique, la convergence en probabilité et la convergence en loi. Il précise que ces incrémentations sont continues et indépendantes l'une de l'autre. Il est à noter que la résolution des convergences des trajectoires est réalisée par des intégrations stochastiques dont les propriétés diffèrent des intégrations classiques. Les démonstrations dépassent le cadre de ce travail.

v. Propriétés des processus de Wiener

Selon Steele (2010), le mouvement brownien standard, également appelé processus de Wiener, noté W_t , est défini par quatre propriétés :

- 1) $W_0 = 0$
- 2) Les incrémentations sont indépendantes. Devolder et al. (2018) ajoutent que les incrémentations sont stationnaires. La stationnarité d'une série temporelle est importante d'après Kirkpatrick et Dahlquist (2011), car la structure est alors globalement stable et permet d'en retirer des informations significatives.
- 3) Les incrémentations $W_t - W_s$ (avec $s \leq t$) suivent une loi normale : $N(0, t - s)$
- 4) $W_t(X)$ est une fonction continue de t . Quant à Devolder et al. (2018), ils n'énoncent pas cette propriété, mais plutôt que l'espérance du mouvement brownien est nulle en temps t et que sa variance vaut t en t .

vi. Martingale

Selon Wiersema (2008), le mouvement brownien est une martingale. Sans entrer dans le détail mathématique, Devolder et al. (2018) expliquent qu'un processus étant une martingale signifie que la meilleure valeur d'estimation d'une date future est la valeur présente observée.

vii. Processus de Markov

D'après Hull (2017), le cours d'un actif est un processus de Markov, si ses trajectoires passées ne permettent pas de définir la distribution des valeurs futures. En d'autres mots, les valeurs passées n'ont aucun lien avec les prédictions futures et seule la variable présente est utile pour évaluer la distribution future. Les propriétés du processus de Markov tissent un lien avec l'efficience faible des marchés étant donné que le prix actuel incorpore toutes les données historiques du cours.

Néanmoins, Aftalion et al. (1998) précisent que la notion d'efficience de marché est confondue à tort avec les processus de martingales, car ce dernier considère des rendements espérés constants.

viii. Mouvement Brownien géométrique

Modéliser les cours de l'action par un mouvement brownien mène à deux problèmes. L'un est l'indépendance de l'espérance de rentabilité exigée par les investisseurs par rapport au prix de

l'action, d'après Hull (2017) et l'autre met en évidence que le modèle brownien additif peut prendre des valeurs négatives ce qui n'est pas réaliste, car la responsabilité limitée d'un détenteur d'actions est limitée à ses apports, selon Devolder et al. (2018). Le modèle de Bachelier a été donc revu par Black, Merton et Scholes.

En partant du modèle additif :

$$S(t) = S(0) + \mu t + \sigma W(t) \quad (1.2.7)$$

Dont l'équation différentielle stochastiques est :

$$dS(t) = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (1.2.8)$$

Selon Wiersema (2008), l'équation différentielle stochastique dépeint les accroissements d'une variable dans un processus aléatoire et dont il est possible de trouver une solution.

Le mouvement brownien géométrique modélise le taux de rendement comme la relation (1.2.8), c'est-à-dire $dS(t)$ par rapport $S(t)$ tel que l'équation différentielle stochastique est :

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (1.2.9)$$

En se passant du détail de calcul, mais en considérant que les rendements logarithmiques suivent une distribution normale, alors le drift et le coefficient de diffusion s'accroissent linéairement avec le temps. La solution à cette équation (1.2.9) est donc :

$$S(T) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W(T)} \quad (1.2.10)$$

Finalement, selon Devolder et al. (2018), la relation (1.2.10) peut se décomposer en deux parties (1.2.11) et (1.2.12). La première est le processus déterministe dont le rendement évolue au taux d'intérêt composé en composition continue.

$$S(t) = S(0)e^{\mu T} \quad (1.2.11)$$

La deuxième est le bruit qui vient perturber le processus déterministe qui n'est autre qu'une martingale exponentielle d'espérance unitaire telle que :

$$S(t) = e^{\sigma W(T) - \frac{1}{2}\sigma^2 T} \quad (1.2.12)$$

En conclusion des hypothèses et au vu des conditions des processus stochastiques, nous considérons tout au long de ce mémoire que les rendements logarithmiques sont calibrés par un mouvement brownien géométrique.

3. La théorie moderne du portefeuille (TMP)

Après avoir défini le cadre de la théorie moderne du portefeuille en définissant la fonction d'utilité de l'investisseur, le plan rendement-variance et les différents types de profils existants, nous passons à une application pratique de l'optimisation d'un portefeuille selon la théorie de moderne du portefeuille de Markowitz (1952).

Bien que les investisseurs utilisaient déjà la notion de rendement espéré et de risque, c'est Harry Markowitz qui formalisa cette approche en 1952 avec la parution de son article « Portfolio Selection » dans le Journal of Finance. En effet, son modèle rendement-variance permet de mettre en exergue la relation entre $E(R)$ et $\sigma(R)$.

D'après West (2005), l'investisseur rationnel préfèrera soit un rendement plus important pour un risque donné, soit un risque minimal pour un rendement fixé. Le croisement entre la courbe d'utilité la plus en haut à gauche (celle qui lui procure le maximum d'utilité) et la frontière efficiente des portefeuilles possibles donne lieu à la décision d'investissement.

Selon Devolder et al. (2018), la contribution d'Harry Markowitz tient dans trois hypothèses :

- a) Le rendement d'un actif financier est une variable aléatoire.
- b) Deux actifs sont corrélés entre eux par le coefficient de corrélation linéaire ou leur covariance
- c) Les investisseurs possèdent une aversion au risque et leur fonction d'utilité en découle

Dès lors, la TMP peut être considérée comme un programme d'optimisation de la moyenne-variance d'un portefeuille (cf. infra p.27) soumis à des contraintes telles que :

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad (1.3.1)$$

Où ω_i est le poids attribué à l'actif i et :

$$\omega_i \geq 0 \quad (1.3.2)$$

Dans le cas où l'on considère que la vente à découvert (short-selling en anglais) n'est pas autorisée. Dans le cas contraire, la contrainte (1.3.2) disparaît. En conséquence de quoi, l'investisseur peut vendre (en short-selling) les actifs dont les rendements sont les plus faibles et acheter (position longue) les actifs dont les rendements sont les plus importants. Par ailleurs, selon Aftalion et al. (1998), lorsque la vente à découvert n'est pas autorisée, cela revient à écarter la prise en considération des actifs sans risque.

Cela mène à l'idée de la diversification pour diminuer le risque du portefeuille. Selon Devolder et al. (2018), à partir de 30 titres, l'effet de diversification atteint son paroxysme, car le risque idiosyncratique n'est plus perceptible, d'où l'adage « ne pas mettre tous ses œufs dans le même panier ». Il est également important de considérer le risque systématique (non diversifiable) qui malgré le nombre de titres restera toujours présent. Selon Desagre (2021), le risque systématique peut être défini comme des fluctuations des rendements des actions qui affectent le marché dans son ensemble. Bien entendu, il existe toutes sortes de risques, mais citons notamment le risque systémique qui est l'apparition soudaine d'un évènement majeur secouant les marchés et qui se répercute sur la sphère réelle. Par exemple, la tristement célèbre crise des subprimes en 2008.

a. Cours de bourse et évaluation d'une action

Pour commencer, selon Devolder et al. (2018), il est nécessaire de rappeler la différence entre le cours de bourse qui résulte de la rencontre entre l'offre et la demande et de la valeur de l'action. L'action peut être évaluée par la méthode des multiples ou par la méthode des dividendes actualisés de Gordon-Shapiro (à dividendes constants, croissants et double croissance). Ces méthodes ne seront pas développées dans le cadre de ce travail. Cependant, elles permettent de donner une valeur théorique à une action qui sera considérée comme surévaluée lorsque son cours en est supérieur et sous-évaluée lorsque son cours en est inférieur.

Une variable aléatoire est caractérisée par sa distribution de probabilité qui n'est pas connue a priori. Dès lors, il est possible d'évaluer cette distribution sur base des données historiques. Par contre, ce n'est pas pour autant que les réalisations futures suivront le modèle de la distribution.

L'évolution du prix d'une action n'aboutit pas à une série statistique étudiable. Par conséquent, la littérature spécialisée travaille à partir des rendements qui ont l'avantage d'être sans dimension.

D'après Desagre (2021), les rendements réalisés d'une action se calculent comme suit :

$$R_t = \frac{P_1 + D_1 - P_0}{P_0} = \frac{D_1}{P_0} + \frac{P_1 - P_0}{P_0}$$

Où P_0 est le prix de l'actif en $t = 0$, la date actuelle, P_1 est le prix futur $t = 1$ et D_1 sont les dividendes versés en période $t = 1$. Les rendements sont composés du taux de rendement (dividend yield) $\frac{D_1}{P_0}$ et du taux de plus-value (capital gain rate) $\frac{P_1 - P_0}{P_0}$.

Comme nous l'avons vu dans le point 2 (cf. supra p.18), les dividendes des gains réalisés sont négligés par hypothèse ainsi que les coûts de transaction. Dès lors, nous travaillerons uniquement à partir du taux de plus-value et plus précisément sur les rendements logarithmiques (log returns), car ils présentent des propriétés statistiques intéressantes. Ils se calculent de la manière suivante :

$$R_t = \ln(P_1) - \ln(P_0) = \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$$

Les rendements logarithmiques ne sont pas exempts de toute critique. En effet, Hudson et Gregoriou (2010) ont conclu qu'il n'y a pas de relation d'un à un entre les moyennes logarithmique et simple. La moyenne des rendements logarithmiques est plus faible que la moyenne des rendements simples. Ils attirent l'attention des praticiens sur ce détail pour ne pas tirer de conclusions erronées alors qu'il existe des méthodes pour ajuster ces différences.

Enfin, nous comprenons qu'il s'agit de construire un modèle qui par défaut n'est pas vrai. Le modèle simplifie la réalité et permet d'en tirer des informations, certes erronées, mais qui permettent d'approximer à défaut de rien.

b. Portefeuille à 2 actifs risqués

Pour commencer, le développement d'un portefeuille à 2 actifs risqués permettra de poser les bases de la TMP, puis nous étendrons l'étude à N actifs risqués.

i. *Résolution algébrique*

Prenons deux titres A_1 et A_2 caractérisés par leur couple espérance-variance ainsi que leurs covariances :

$$A_1: [E(R_1); \sigma_1^2]$$

$$A_2: [E(R_2); \sigma_2^2]$$

$$\text{Cov}(R_1, R_2) = \sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

Où ρ_{12} est le coefficient de corrélation linéaire.

Pour rappel :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x, y) &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ \rho_{xy} &= \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

avec $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$

Un portefeuille est caractérisé par une pondération de ses actifs. Le poids de chaque titre fait donc varier le rendement et le risque du portefeuille, respectivement noté E_p et σ_p . Dans le cas d'un portefeuille de 2 actifs, l'actif A_1 est composé d'une proportion α et l'actif A_2 de sa complémentarité $(1 - \alpha)$. L'espérance mathématique et la variance du portefeuille s'écrivent respectivement comme suit :

$$E_p = \alpha E_1 + (1 - \alpha) E_2 \quad (1.3.4)$$

$$\sigma_p^2 = \alpha^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\sigma_{12} \quad (1.3.5)$$

La relation 1.3.5 peut être réarrangée dans l'objectif de faire ressortir le lien entre E_p et σ_p :

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \alpha^2 \sigma_1^2 + (1^2 + \alpha^2 - 2\alpha)\sigma_2^2 + (2\alpha - 2\alpha^2)\sigma_{12} \\ \sigma_p^2 &= \alpha^2 \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \alpha^2 \sigma_2^2 - 2\alpha \sigma_2^2 + 2\alpha \sigma_{12} - 2\alpha^2 \sigma_{12} \\ \sigma_p^2 &= \alpha^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) + 2\alpha(\sigma_{12} - \sigma_2^2) + \sigma_2^2 \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

En isolant α de la relation (1.3.4), on obtient :

$$\alpha = \frac{E_p - E_2}{E_1 - E_2} \quad (1.3.7)$$

Introduisons le résultat de la relation (1.3.7) dans la formule (1.3.6), on a :

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{E_p - E_2}{E_1 - E_2} \right)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) + 2 \left(\frac{E_p - E_2}{E_1 - E_2} \right) (\sigma_{12} - \sigma_2^2) + \sigma_2^2 \quad (1.3.8)$$

Le développement mathématique issu de Devolder et al. (2018) est en annexe (cf. infra « Annexe 1 »), on obtient :

$$\sigma_p^2 = E_p^2 \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})}{(E_1 - E_2)^2} + 2E_p \frac{[E_1(\sigma_{12} - \sigma_2^2) + E_2(\sigma_{12} - \sigma_1^2)]}{(E_1 - E_2)^2} + \frac{E_2^2 \sigma_1^2 - 2E_1 E_2 \sigma_{12} + E_1^2 \sigma_2^2}{(E_1 - E_2)^2} \quad (1.2.9)$$

En posant les nombres suivants :

$$\begin{aligned} G &= \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})}{(E_1 - E_2)^2} \\ H &= 2 \frac{[E_1(\sigma_{12} - \sigma_2^2) + E_2(\sigma_{12} - \sigma_1^2)]}{(E_1 - E_2)^2} \end{aligned}$$

$$I = \frac{E_2^2 \sigma_1^2 - 2E_1 E_2 \sigma_{12} + E_1^2 \sigma_2^2}{(E_1 - E_2)^2}$$

On obtient l'équation :

$$\sigma_p^2 = G \cdot E_p^2 + H \cdot E_p + I \quad (1.3.10)$$

$$\Leftrightarrow G \cdot E_p^2 + H \cdot E_p + (I - \sigma_p^2) = 0 \quad (1.3.11)$$

Cette équation correspond à une hyperbole dans l'espace $(\sigma(R); E(R))$. Il s'agit du lien entre l'espérance et le risque du portefeuille selon les proportions α de l'actif A_1 et $(1 - \alpha)$ de l'actif A_2 . Pour un risque σ_k fixé, seul la partie supérieure de l'hyperbole est optimale. Elle se définit comme suit :

$$E_k^{max} = \left[\frac{-H \pm \sqrt{H^2 - 4G(I - \sigma_k^2)}}{2G} \right] \quad (1.3.12)$$

Pour E_k^{max} donné, il est possible de calculer la composition optimale à partir de la relation 1.2.7 :

$$\alpha = \frac{E_k^{max} - E_2}{E_1 - E_2}$$

La figure 5 (cf. infra « Figure 5 ») illustre l'ensemble des combinaisons possibles d'un portefeuille composé des actions Solvay et Umicore dont les rendements journaliers ont été enregistrés entre le 3 janvier 2011 et le 30 décembre 2021. En abscisse, nous retrouvons le risque, soit $\sigma(R)$ et en ordonnée, le rendement, soit $E(R)$. Comme mentionné précédemment, l'ensemble des combinaisons, à savoir les proportions α de l'action Solvay et $(1 - \alpha)$ de l'action Umicore, forme une hyperbole dans le plan $(\sigma(R); E(R))$. Au point A_1 , le portefeuille est composé uniquement de l'action Solvay et au point A_2 , il est structuré uniquement de l'action Umicore.

Notons que la contrainte $\alpha \in [0; 1]$ est implicite dans le développement. Cependant, si la vente à découvert est autorisée, cette condition disparaît et par conséquent, il est possible de dépasser (graphiquement) les points A_1 et A_2 . Par exemple, pour dépasser le point A_2 , cela signifie que $\alpha < 0$ et que le produit des actions Solvay vendues est utilisé dans l'achat d'actions Umicore et réciproquement.

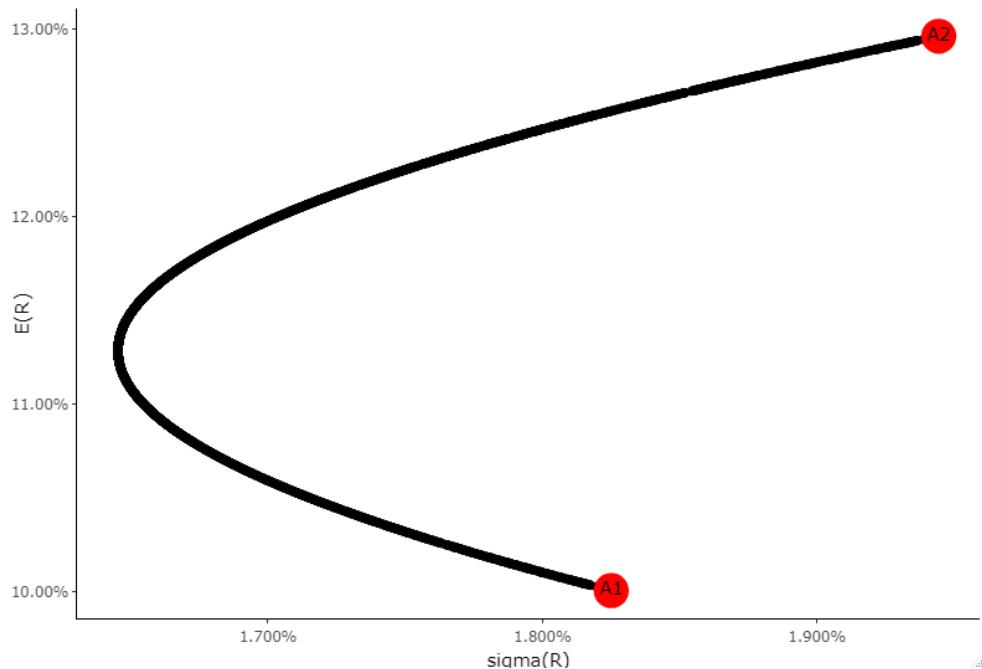


Figure 5 : Portefeuille composé des actions Solvay et Umicore

ii. Coefficient de corrélation linéaire

Selon Aftalion et al. (1998), le coefficient de corrélation donne la forme de l'équation paramétrique. Autrement dit, la courbe liant les points A_1 et A_2 prendra une forme différente selon la valeur de ρ_{12} . Quatre cas particuliers sont décrits ci-dessous :

- Lorsque $\rho_{12} = 1$, les actions sont linéairement, positivement et parfaitement corrélées ce qui implique que l'équation paramétrique devient une droite allant de A_1 à A_2 .
- Lorsque $\rho_{12} = -1$, les titres sont linéairement, négativement et parfaitement corrélés. Il s'agit d'un cas purement théorique de diversification parfaite, car ce sont deux demi-droites partant de A_1 et A_2 pour rejoindre l'axe des ordonnées. Le rendement est alors sûr et certain et son risque est nul ($\sigma = 0$). Il s'agit de la courbe bleue sur la figure 6 (cf. infra « Figure 6 »).
- Lorsque $\rho_{12} = 0$, les actifs ne sont pas linéairement corrélés. Dès lors, la diversification est partielle et correspond à une branche de l'hyperbole telle que la figure 5 (cf. supra « Figure 5 »).
- Lorsque $\rho_{12} = 0$ et l'actif A_2 est sans risque, c'est-à-dire, $\sigma_2 = 0$. Le lieu des possibles devient une demi-droite passant par le point dont l'ordonnée à l'origine est $E[R(A_2)]$ qui correspond à la rentabilité d'un actif sans risque. Cela pourrait être illustré par la droite passant par l'ordonnée à l'origine et l'actif « Intel » sur la figure 6.

Les quatre cas sont illustrés par la figure 6 (cf. infra « Figure 6 »).

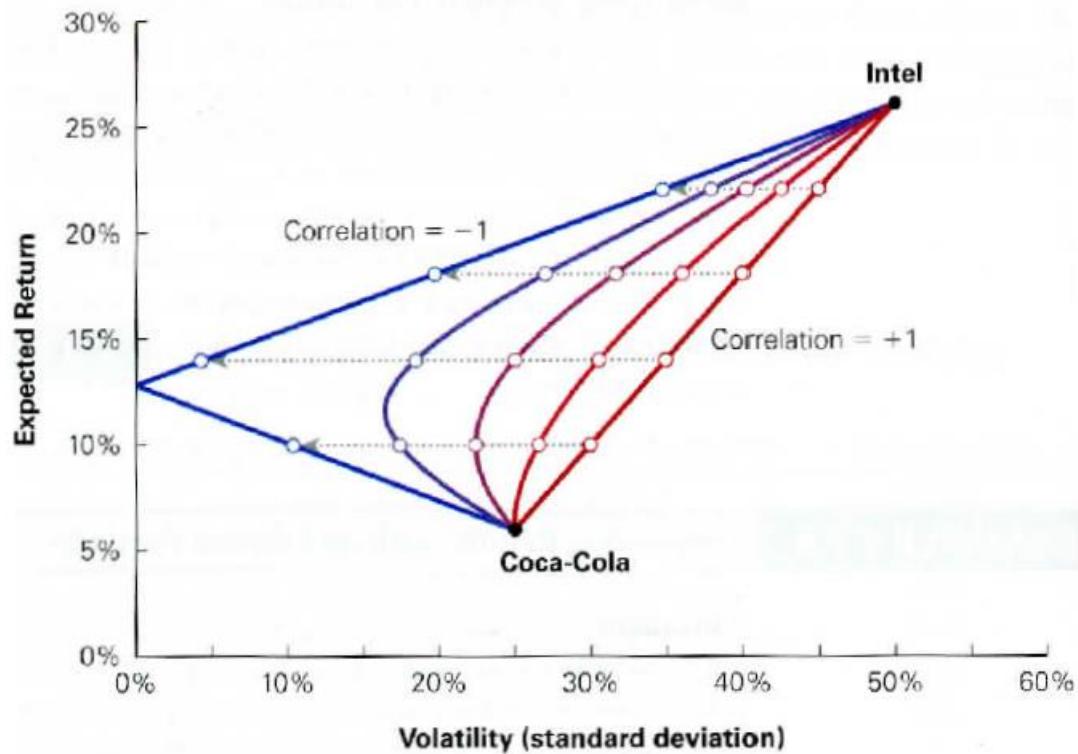


Figure 6 : Effet de la corrélation entre deux actifs

Source : Berk, J. et DeMarzo, P. (2020). *Corporate Finance* (5^e éd.). Harlow : Pearson.

Comme décrit plus haut, la courbe entre les deux actifs change en fonction du degré de corrélation entre eux.

c. Décision d'investissement

Devolder et al. (2018) nous décrivent la décision d'investissement par individu de la manière suivante.

Partons d'un investisseur averse envers le risque. Comme nous l'avons vu, sa fonction d'utilité est représentée par une fonction logarithme, soit l'espérance d'utilité de la richesse. En adaptant la relation (1.1.23), on obtient :

$$E(U(R)) \cong E_p - \frac{1}{2} [\sigma_p^2 + E_p^2] \quad (1.3.13)$$

Cette équation correspond à une courbe d'indifférence dans un espace $(\sigma(R); E(R))$. Prenons également deux actifs risqués, A_1 et A_2 , dont la relation entre l'espérance et l'écart-type de portefeuilles de différentes combinaisons est donnée par l'équation : $\sigma_p^2 = G \cdot E_p^2 + H \cdot E_p + I$ dans un espace $(\sigma(R); E(R))$.

Sur la figure 7, sont représentés les courbes d'iso-espérance de l'investisseur et de l'hyperbole des combinaisons possibles de portefeuilles pondérés par les actions A_1 et A_2 . Pour rappel, la courbe d'indifférence la plus en haut à gauche a la plus grande utilité. Cependant, elle ne croise pas de portefeuille réalisable. L'utilité est optimisée lors que le point R est atteint, c'est-à-dire, lorsque la courbe d'iso-espérance la plus haute croise le lieu des portefeuilles réalisables.

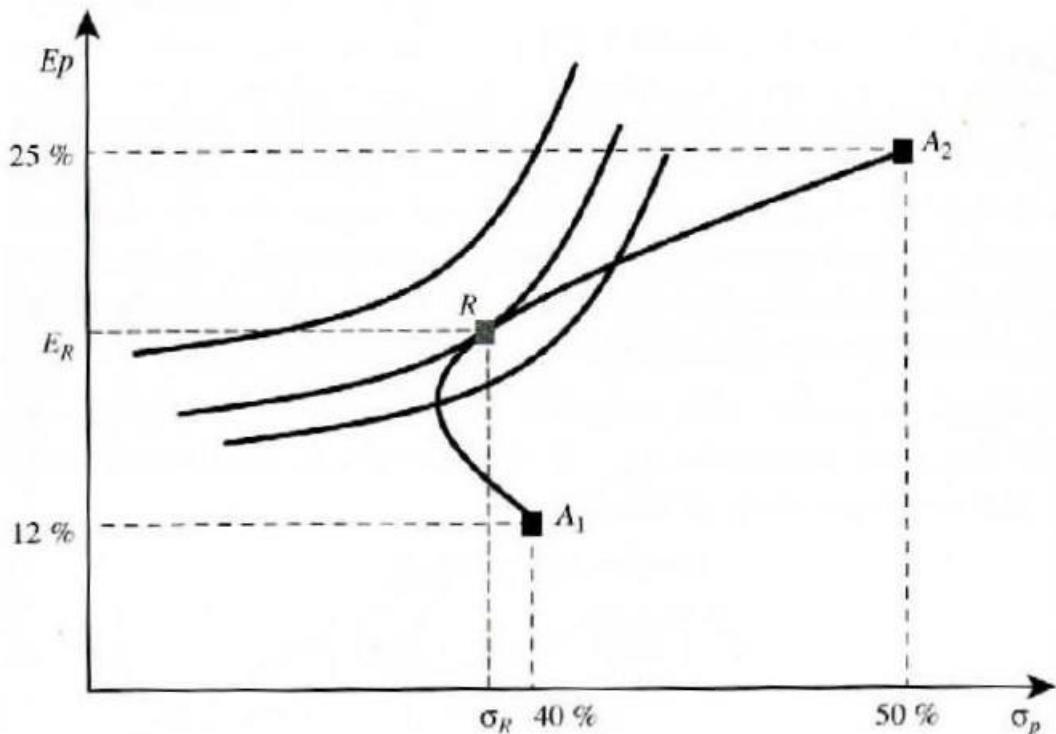


Figure 7 : Rencontre entre la fonction d'utilité de l'investisseur et le lieu des portefeuilles réalisables

Source : Devolder, P., Fox, M. et Vaguener, F. (2018). *Mathématiques financières* (3^e éd). Montreuil : Pearson.

Le problème de maximisation de l'utilité de l'investisseur devient un programme mathématique dont la résolution se fait par la méthode des paramètres de Lagrange. Celui-ci se traduit de la sorte :

$$\underset{E_p, \sigma_p, \lambda}{\text{Max}} \quad L = E_p - \frac{1}{2} [\sigma_p^2 + E_p^2] + \lambda(G \cdot E_p^2 + H \cdot E_p + I - \sigma_p^2) \quad (1.3.14)$$

En annulant les dérivées de L par rapport à E_p , σ_p et λ , on est face à un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial E_p} = 1 - E_p + \lambda H = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_p} = -\sigma_p + 2\lambda\sigma_p = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = G \cdot E_p^2 + H \cdot E_p + I - \sigma_p^2 = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on définit le rendement qui maximise l'utilité, c'est-à-dire le point de rencontre R sur la figure 7. On obtient :

$$E_R = \frac{2 - H}{2G + 2} \quad (1.3.15)$$

En injectant E_R dans la relation (1.3.10), on a :

$$\sigma_R = (G \cdot E_R^2 + H \cdot E_R + I)^{\frac{1}{2}} \quad (1.3.16)$$

Et en appliquant E_R dans l'équation (1.3.7), on connaît la proportion optimale :

$$\alpha = \frac{E_R - E_2}{E_1 - E_2} \quad (1.3.17)$$

Donc, un investisseur qui parvient à définir ses fonctions d'utilité et qui se trouve en présence de 2 actifs peut définir la composition de portefeuille optimale en résolvant un programme mathématique.

d. Portefeuille à 2 actifs risqués et un actif sans risque

Sur les marchés financiers, l'investisseur rencontre toute sorte de produits financiers aussi bien des actions, que des produits dérivés, mais aussi des obligations, etc. Certains produits financiers, comme les obligations d'état, sont assimilés au taux sans risque. Pour Berk et DeMarzo (2020), l'introduction d'un actif sans risque permet de réduire la volatilité globale du portefeuille ou permet à un investisseur agressif d'emprunter des fonds pour les investir sur le marché.

En outre, d'après Mukherji (2011), les professionnels du monde de la finance et la littérature spécialisée utilisent les bons du Trésor à court et long terme de manière interchangeable sans études empiriques à l'appui. Son étude montre que l'horizon de temps a un impact à cause de la volatilité, du risque de marché et du risque d'inflation sur les bons du Trésor (Treasury securities = Treasury bills + Treasury bonds). Hull (2017) définit le risque de marché comme la variation des variables de marché. Néanmoins, Mukherji (2011) constate qu'un bon du Trésor

(Treasury bills) d'horizon 10 ans présente le risque de marché le plus faible. Malencontreusement, son étude est valable uniquement sur le marché américain et une étude approfondie est nécessaire sur le marché européen. Dans le cadre de ce travail, nous nous contenterons d'utiliser le bon du Trésor allemand (Bundesanleihen) sur un horizon de temps de 10 ans comme taux sans risque.

i. Introduction d'un actif sans risque

Selon Poncet et Portrait (2017), l'introduction d'un actif sans risque dans la diversification du portefeuille est nommé le « théorème de séparation en deux fonds » par les travaux de James Tobin en 1958.

Prenons un investisseur ayant le choix entre un investissement sans risque, noté R_f et 2 actifs risqués. Selon Devolder et al. (2018), il pondère son portefeuille entre une proportion $(1 - \alpha)$ de l'actif sans risque et une proportion α des actifs risqués. La rentabilité d'un tel portefeuille s'écrit comme suit :

$$E = (1 - \alpha)R_f + \alpha E_p \quad (1.3.18)$$

$$\Leftrightarrow E = R_f + \alpha(E_p - R_f) \quad (1.3.19)$$

Où E_p représente la rentabilité du portefeuille composé des 2 actifs risqués. $E_p - R_f$ représente le risque premium (ou prime de risque), c'est-à-dire, le surplus de rendement nécessaire pour compenser le risque apporté par le portefeuille d'actifs risqués. Comme nous connaissons le taux de rendement de l'actif sans risque, il n'est pas nécessaire de calculer son espérance. Le risque du portefeuille est, quant à lui, noté :

$$\sigma^2 = \text{Var}[(1 - \alpha)R_f + \alpha E_p] \quad (1.3.20)$$

L'actif sans risque ayant une volatilité nulle par définition, on a :

$$\sigma^2 = \alpha^2 \sigma_p^2 \quad (1.3.21)$$

Avec σ_p^2 en tant que variance du portefeuille des 2 actifs risqués. En isolant α , on a :

$$\alpha = \frac{\sigma}{\sigma_p} \quad (1.3.22)$$

Ensuite, en l'intégrant dans la relation (1.3.18) de rentabilité, on obtient :

$$E = \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_p}\right)R_f + \frac{\sigma}{\sigma_p} E_p \quad (1.3.23)$$

En la reformulant, elle devient donc :

$$E = \left(\frac{E_p - R_f}{\sigma_p}\right)\sigma + R_f \quad (1.3.24)$$

Nous sommes face à une équation linéaire dont le coefficient angulaire $\left(\frac{E_p - R_f}{\sigma_p}\right)$ est nommé le coefficient de Sharpe :

$$\text{Ratio de Sharpe} = \left(\frac{E_p - R_f}{\sigma_p} \right) \quad (1.3.25)$$

À un risque σ fixé, l'investisseur optimisera son portefeuille en le composant d'actifs risqués dont le coefficient de Sharpe est le plus élevé.

Sur la figure 8, on observe que le point sur l'ordonnée à l'origine correspond au taux sans risque, soit 5% de rendement pour un portefeuille composé uniquement de cet actif. La frontière d'efficience des portefeuilles d'actifs risqués est illustrée par la courbe rouge qui est la partie supérieure de l'hyperbole de la TMP. La droite bleue représente l'ensemble des combinaisons possibles entre l'actif sans risque et les actifs risqués. Au point $x = 50\%$, le portefeuille est composé à moitié d'actif sans risque et à moitié des actifs risqués. Au point P , le portefeuille comporte aucun actif sans risque. Au-delà de ce point, l'investisseur emprunte au taux sans risque pour investir dans des actifs risqués, autrement appelé achat à effet de levier ou achat sur marge. On note donc que le risque premium augmente proportionnellement au risque, σ , ce qui confirme l'aspect linéaire de la relation (1.3.24).

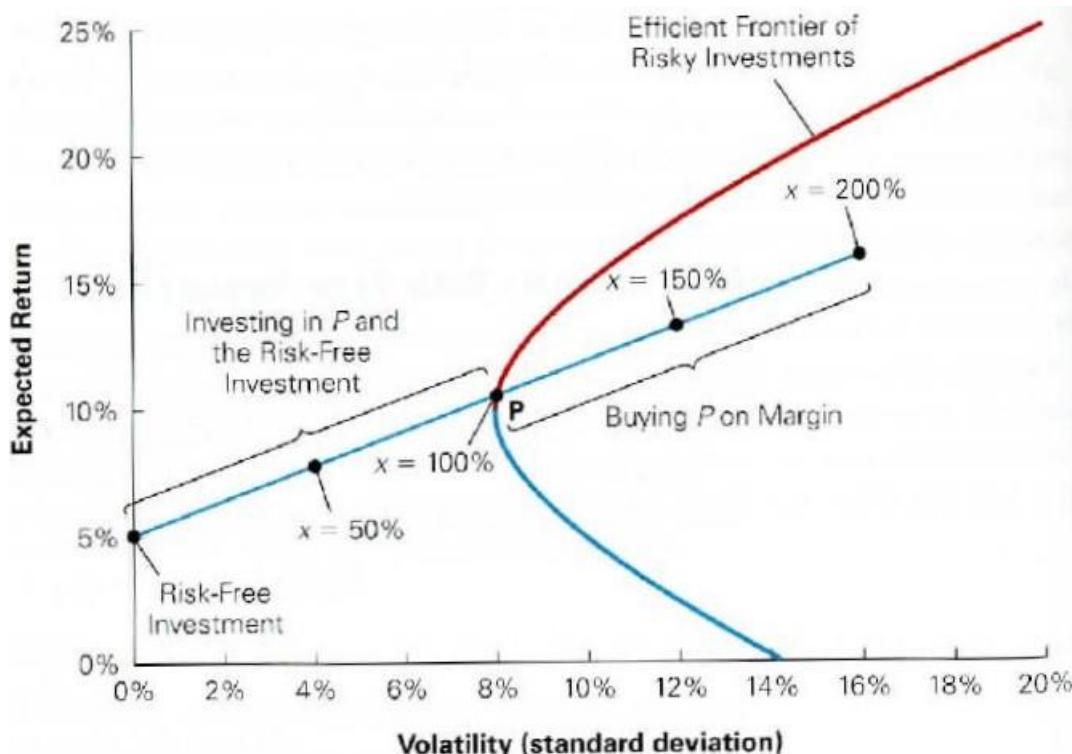


Figure 8 : Coefficient de Sharpe

Source : Berk, J. et DeMarzo, P. (2020). *Corporate Finance* (5^e éd.). Harlow : Pearson.

Cependant, on réalise qu'il est possible d'établir un portefeuille à risque identique, mais avec une espérance de rendement plus élevée. Il suffit de prendre un point sur la courbe rouge ayant la même abscisse qu'un point sur la ligne bleue en achat sur marge.

Par conséquent, on recherche la pente la plus raide par rapport à la frontière d'efficience, c'est-à-dire, le portefeuille permettant le plus grand gain par rapport au risque encouru. En d'autres mots, la droite verte tangente à la courbe rouge sur la figure 9 (cf. infra « Figure 9 ») indique le portefeuille maximisant le ratio de Sharpe. Elle est également appelée la « droite de marché ». D'ailleurs, Berke et DeMarzo (2020) expliquent que si les rendements sont normalement distribués, alors le portefeuille tangentiel permettrait, avec une forte probabilité, d'obtenir des gains supérieurs à un placement sans risque. De plus, le coefficient de Sharpe peut être compris comme le nombre d'écart-types que le rendement du portefeuille doit perdre pour sous-performer par rapport à l'investissement sans risque.

ii. Ratio de Sharpe

Selon Fernando (2022), le coefficient de Sharpe peut prendre différentes valeurs. S'il est négatif, cela signifie que le taux sans risque est plus rentable que le portefeuille risqué ou que les rendements du portefeuille risqués sont négatifs. Bien entendu, un ratio positif est appréciable. Au-delà de la valeur 1, l'excès de rendement est relativement supérieur au risque supplémentaire pris. Dans le cas où il est strictement compris entre 0 et 1, le risque accumulé est plus élevé que le rendement acquis.

Dès lors, la position de l'investisseur à l'égard du risque n'impacte pas la composition du portefeuille d'actifs risqués, mais plutôt sur les quantités allouées dans l'actif sans risque puisqu'inévitablement tout le monde préférera le portefeuille le plus efficient possible, soit le portefeuille tangentiel. Un investisseur défensif aura une plus grande part d'actif sans risque et se situera vers la gauche de la droite, près de l'ordonnée à l'origine. Alors qu'un investisseur plutôt agressif composera son portefeuille en une plus grande quantité d'actifs risqués et se rapprochera de la frontière d'efficience.

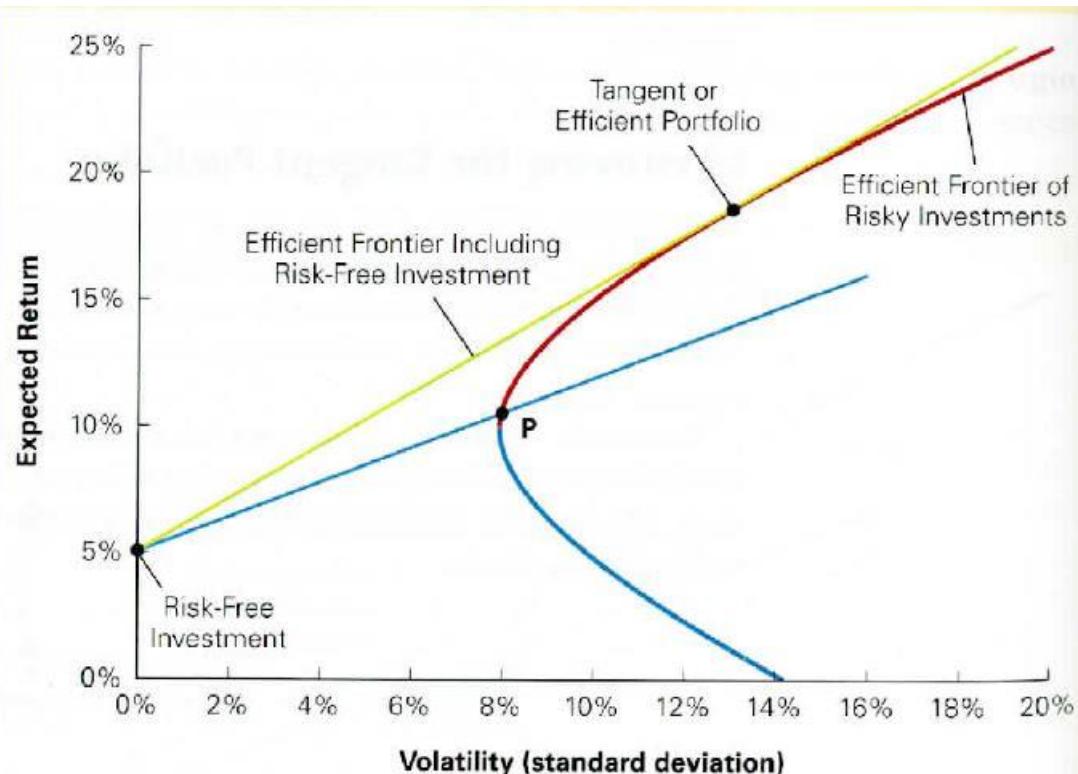


Figure 9 : Portefeuille tangent

Source : Berk, J. et DeMarzo, P. (2020). *Corporate Finance* (5^e éd.). Harlow : Pearson.

En conclusion, selon Berk et DeMarzo (2020), le ratio de Sharpe mesure l'excédent de rendement par unité de volatilité dont on cherche le portefeuille ayant ce coefficient le plus élevé. Notamment, Peralta et Zareei (2016) utilisent ce ratio pour comparer la performance de différents portefeuilles.

iii. Point d'équilibre

D'après Devolder et al. (2018), il est possible de calculer algébriquement les coordonnées du point de tangence et de définir l'équation de la droite de marché en partant de la relation (1.2.11) :

$$F(\sigma_p, E_p) = G \cdot E_p^2 + H \cdot E_p + (I - \sigma_p^2) = 0 \quad (1.3.26)$$

Par les propriétés de différenciation des fonctions implicites, on obtient :

$$E = b \cdot \sigma + R_f \quad (1.3.27)$$

Où b vaut :

$$b = \left\{ \frac{\left[-\frac{R_f H + 2I}{(2GR_f + H)} \right]}{\sqrt{G \left[-\frac{R_f H + 2I}{(2GR_f + H)} \right]^2 - H \frac{R_f H + 2I}{(2GR_f + H)} + I}} \right\} \quad (1.3.28)$$

Comme nous l'avons vu au point précédent (cf. supra p31), la décision sera réalisée lorsque la rencontre entre la courbe d'iso-espérance et la droite de marché est à l'équilibre. Le point E sur la figure 10 (cf. infra « Figure 10») illustre ce point de tangence.

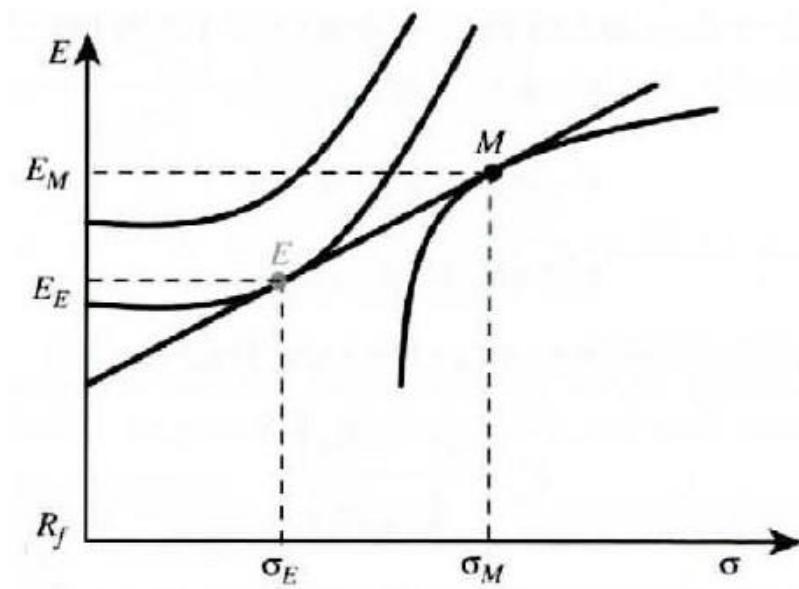


Figure 10 : Point d'équilibre entre les iso-espérances et la droite de marché

Source : Devolder, P., Fox, M. et Vaguener, F. (2018). *Mathématiques financières* (3^e éd). Montreuil : Pearson.

Algébriquement, on maximise par la méthode de Lagrange la fonction (1.3.23) sous la contrainte (1.3.27) :

$$\underset{E, \sigma, \lambda}{\text{Max}} L = E - \frac{1}{2}[\sigma^2 + E^2] + \lambda(E - b \cdot \sigma - R_f) \quad (1.3.29)$$

Où b est le ratio de Sharpe. On obtient comme résultat :

$$\max E(U(R)) \cong E_E - \frac{1}{2}[\sigma_E^2 + E_E^2] \cong \frac{(b^2 + R_f)}{(1 + b^2)} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{(1 - R_f)}{(1 + b^2)} \right)^2 b^2 + \left(\frac{(b^2 + R_f)}{(1 + b^2)} \right)^2 \right] \quad (1.3.30)$$

Où E_E et σ_E sont respectivement l'ordonnée à l'origine et l'abscisse des valeurs à l'équilibre au point E sur la figure 10.

e. Portefeuille à N actifs risqués

Étendons le principe d'optimisation de portefeuille à N actifs. La figure 11 (cf. infra « Figure 11 ») a été établie sur base des rendements logarithmiques de 8 actions belges entre le 1er janvier 2011 et le 31 décembre 2021 (cf infra « Tableau 1 »). Lorsqu'on introduit plus de 2 actifs, l'ensemble des portefeuilles devient un nuage de point où l'hyperbole se démarque clairement. Il s'agit d'un très grand nombre de combinaisons possibles qui forme la frontière d'efficience entre les points « Risk min » et « Max SR » en rouge sur la figure 11 qui est la partie supérieure de la courbe de l'hyperbole.

La figure 11 a été réalisée sous le logiciel R en analysant les actions suivantes (cf. infra « Tableau 1 ») :

Tableau 1 : Actions étudiées et leurs Tickers

Action	Ticker
Ackermans & van Haaren	ACKB.BR
AB InBev	ABI.BR
Colruyt	COLR.BR
Solvay	SOLB.BR
Umicore	UMI.BR
Kinepolis group	KIN.BR
Deceuninck	DECB.BR
Cofinimo	COFB.BR

La méthodologie pour le développement de la TMP est la suivante :

- 1) Calculer les rendements logarithmiques de chaque action :

$$R_t = \ln(P_1) - \ln(P_0) = \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right).$$

- 2) Annualiser les rendements moyens de chaque action :

$$R_{annualisé} = \frac{\exp(\sum_t R_t) - 1}{N} \text{ où } N \text{ est le nombre d'année.}$$

- 3) Créer la matrice variance-covariance (cf. infra « Annexe 2 »).

- 4) Générer 8.000 compositions aléatoires de portefeuilles.

- 5) Définir le rendement, l'écart-type et le ratio de Sharpe pour chaque entrée (cf. infra « Annexe 2 »).

- 6) Afficher le nuage de point (cf. infra « Figure 11 »).

D'après Desagre (2021), pour calculer l'écart-type d'un portefeuille donné, il faut avoir recours à la formule suivante :

$$\sigma_p = \sqrt{X^t \cdot \Sigma \cdot X} \quad (1.3.31)$$

Où X est un vecteur de poids, X^t sa transposée et Σ est la matrice de variance-covariance.

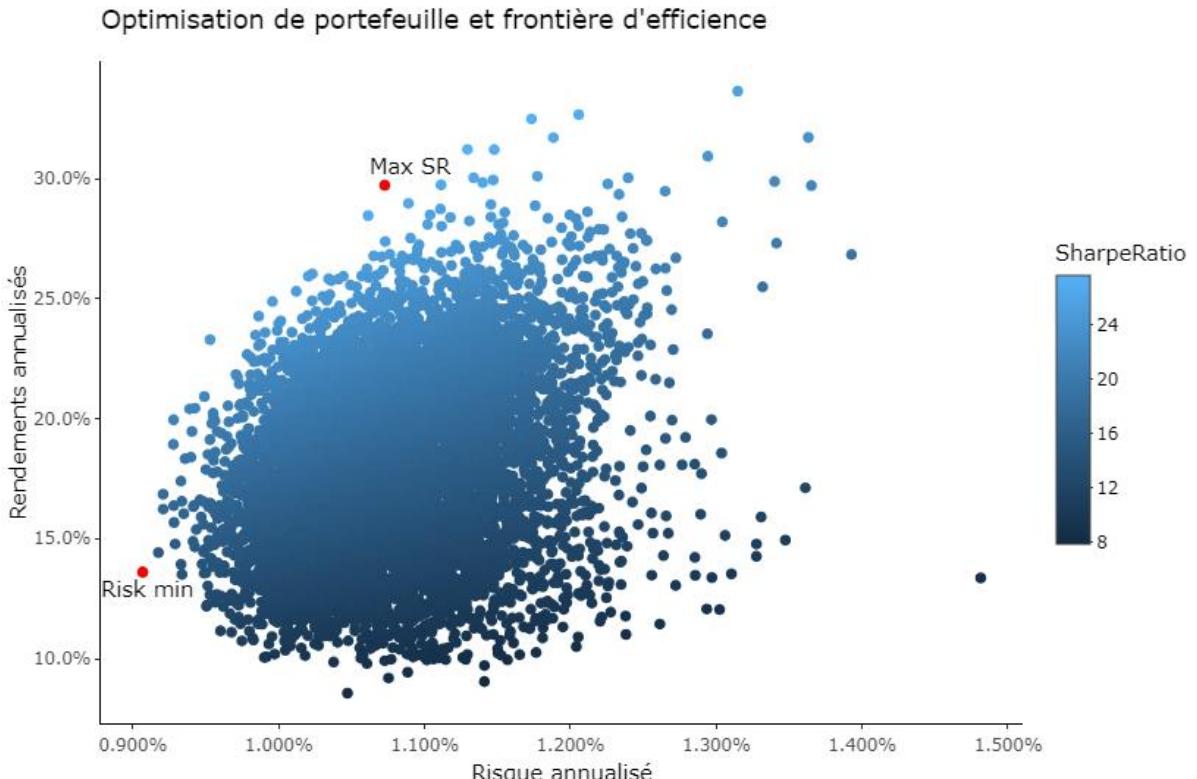


Figure 11 : Frontière d'efficience

Au point précédent (cf. supra p33), il a été démontré que l’investisseur maximisera le rendement de son portefeuille en cherchant le coefficient de Sharpe le plus élevé, ici représenté par le point « Max SR ». La légende permet de constater que les points les plus clairs ont un coefficient de Sharpe élevé. Ceux-ci se situent naturellement vers le haut de l’équation paramétrique vu que la pente est d’autant plus raide en partant d’un taux sans risque d’une valeur négative. Ce dernier est basé sur le bon du Trésor allemand dont la valeur s’élevait à -0,18% le 31 décembre 2021. Les intérêts négatifs signifient une perte de pouvoir d’achat pour les placements sans risque. Dans ce cas, la composition de la part d’actifs risqués semble être plus attractive.

i. Résolution algébrique

Devolder et al. (2018) proposent une solution algébrique pour une stratégie de minimisation des risques. Pour trouver le portefeuille optimal minimisant le risque pour un rendement μ donné, il s’agit de résoudre un programme mathématique par la méthode de Lagrange permettant ainsi de définir l’ensemble des pondérations de chaque actif a_i tel que :

$$\underset{a_i, \lambda_1, \lambda_2}{\text{Min}} L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \sigma_{ij} + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n a_i E_i - \mu \right) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n a_i - 1 \right) \quad (1.3.32)$$

Dont les solutions pour a_i sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial a_1} = 2a_1\sigma_{11} + 2a_2\sigma_{12} + \dots + 2a_n\sigma_{1n} + \lambda_1E_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial a_2} = 2a_1\sigma_{21} + 2a_2\sigma_{22} + \dots + 2a_n\sigma_{2n} + \lambda_1E_2 + \lambda_2 = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial a_n} = 2a_1\sigma_{n1} + 2a_2\sigma_{n2} + \dots + 2a_n\sigma_n + \lambda_1E_n + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = a_1E_1 + a_2E_2 + \dots + a_nE_n = \mu \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \end{array} \right. \quad (1.3.33)$$

Ce système peut être réécrit sous la forme matricielle :

$$\begin{vmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & E_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \dots & 2\sigma_{2n} & E_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \dots & 2\sigma_{nn} & E_n & 1 \\ E_1 & E_2 & \dots & E_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.3.34)$$

Notons :

$$C \cdot A = K \quad (1.3.35)$$

Isolons le vecteur des compositions A :

$$A = C^{-1} \cdot K \quad (1.3.36)$$

Où C^{-1} est l'inverse de la matrice C . Dès lors, le vecteur A structure le portefeuille de manière optimale pour un rendement μ donné.

ii. Résolution matricielle

Selon Peralta et Zareei (2016), deux stratégies sont possibles dans le modèle de Markowitz et peuvent être réécrites en terme de notations vectorielles et matricielles. La première est la stratégie de variance minimale, abrégée en « minv », qui consiste en la minimisation du risque du portefeuille, σ_p , par application du vecteur poids X et de sa transposée X^t à la matrice des covariances Σ tel que :

$$\min_X \sigma_p = \sqrt{X^t \cdot \Sigma \cdot X} \quad (1.3.37)$$

avec comme contrainte : $X^t \mathbf{1} = 1$ où $\mathbf{1}$ est le vecteur unitaire. La solution est donnée par :

$$X_{minv}^* = \frac{1}{\mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \Sigma^{-1} \mathbf{1} \quad (1.3.38)$$

La deuxième stratégie moyenne-variance, nommée « mv », consiste en l'introduction d'un rendement sans risque r_f qui permet de calculer les excès des rendements de chaque actif, c'est-à-dire $r_i^e = r_i - r_f$ pour r_i étant le rendement de l'actif i . L'ensemble des rendements en excès r_i^e forme le vecteur μ^e . La contrainte de la relation (1.2.37) devient alors $X^T \mu^e = R^e$ où R^e est le niveau d'excès de rendement fixé. L'objectif est donc de calculer la variance minimale pour un rendement donné au préalable et dont la solution est donnée par :

$$X_{mv}^* = \frac{R^e}{\mu^{eT} \Sigma^{-1} \mu^e} \Sigma^{-1} \mu^e \quad (1.3.39)$$

Ces notations permettront d'appréhender la deuxième partie du travail sous le langage des réseaux. Le point suivant apporte un regard critique sur la théorie moderne du portefeuille par rapport à l'allocation optimale des pondérations de chaque actif.

4. Les limites de la TMP

Même si Markowitz n'a pas inventé les notions de rentabilité et de risque, il les formalisa dans son modèle théorique qui devint la pierre angulaire de la finance moderne. Malgré que son travail ait été revu et amélioré, il n'en reste pas moins exempt de toute critique. Dans cette partie, nous traiterons des limites de la TMP et de ses défauts.

a. Iso-moyennes et iso-variances

Tout d'abord, Geambasu et al. (2013) expliquent que les conditions préalables de la TMP sont en inadéquation avec la réalité et qu'il est nécessaire de les assouplir. En effet, la stabilité de la corrélation des actifs dans le temps ainsi que les iso-variances et iso-moyennes sont des exemples de conditions inexistantes dans la pratique.

Dans la cadre de portefeuille à 3 actifs risqués, Markowitz (1952) définit les iso-moyennes comme des lignes droites qui comportent l'ensemble des points dont le rendement espéré donné est le même. Il définit également les iso-variances comme l'ensemble des points dont la variance est identique. Elles forment un système d'ellipses concentriques. On considère les données suivantes :

$$E = \sum_{i=1}^3 X_i \mu_i$$

$$V = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 X_i X_j \sigma_{ij}$$

Sous contraintes que :

$$\sum_{i=1}^3 X_i = 1$$

$$X_i \geq 0 : i \in \{1,2,3\}$$

On écarte le short-selling. En reformulant la première contrainte, on obtient :

$$X_3 = 1 - X_1 - X_2$$

Ceci afin de réduire le nombre de variables et de rester dans un plan. Les contraintes forment le triangle abc sur la figure 12 (cf. infra « Figure 12 ») représentant les portefeuilles atteignables. Le point central X minimise la variance. La rencontre entre l'iso-moyennes et l'iso-variances est le point dont la variance est la plus faible lorsqu'on se déplace le long d'une iso-moyenne donnée. En passant par le point central X et les points de tangence, on forme la ligne critique, l . Cette ligne l fait partie des portefeuilles efficients tout autant que le segment sur la droite ab. Cela correspond à l'hyperbole dans un plan $(\sigma(R); E(R))$.

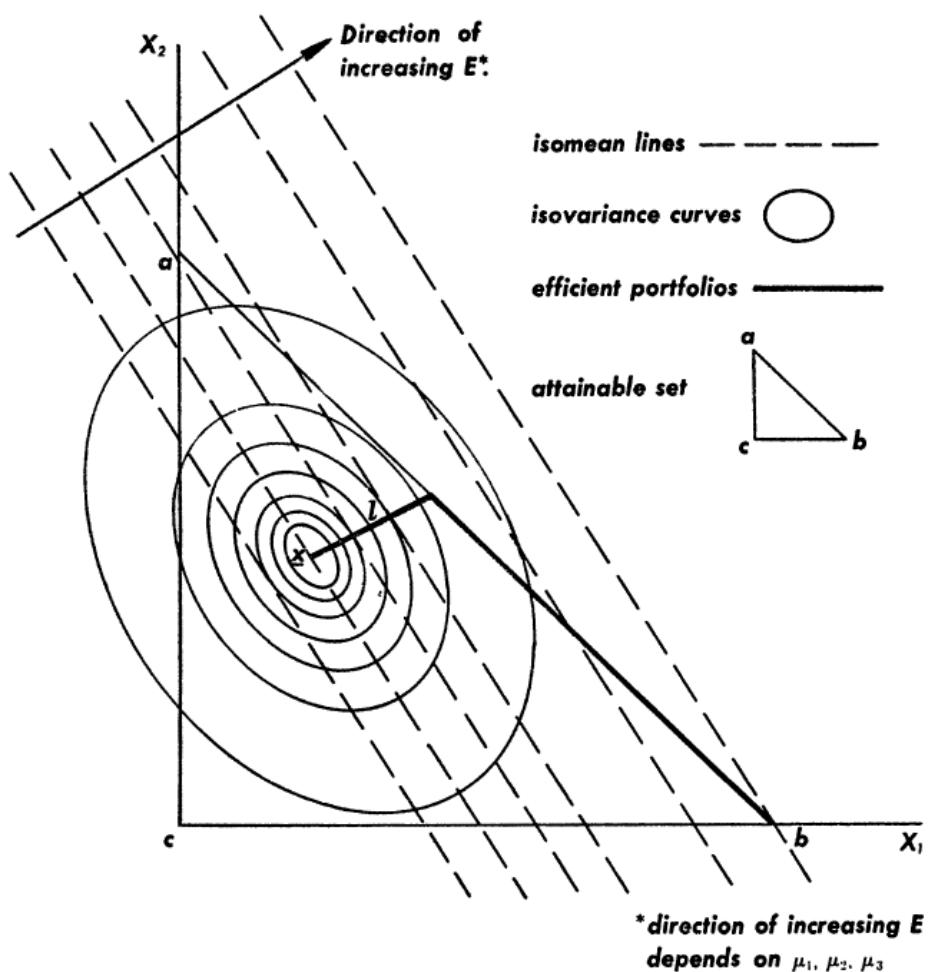


Figure 12 : Iso-moyennes et iso-variances

Source :Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. The Journal of Finance, 1(7), 77-91. doi : 10.2307/2975974

Beste, Leventhal, Williams et Lu (2022) précisent que les iso-moyennes ont en général la forme d'un plan de $(n-2)$ dimensions. Quant aux iso-variances, elles seront toujours ellipsoïdes.

b. La distribution Gaussienne-Laplace

Cerqueti et Lupi (2017) rejoignent Geambasu et al. (2013) sur l'un des défauts de la TMP en pointant du doigt la théorie gaussienne, c'est-à-dire que les rendements espérés suivent une distribution normale, voire log normale. En concordance avec le commentaire précédent, Brada, Ernst et Van Tassel (1966) affirment qu'il a été démontré empiriquement que la variation des prix ne suivait pas une distribution Gauss-Laplace.

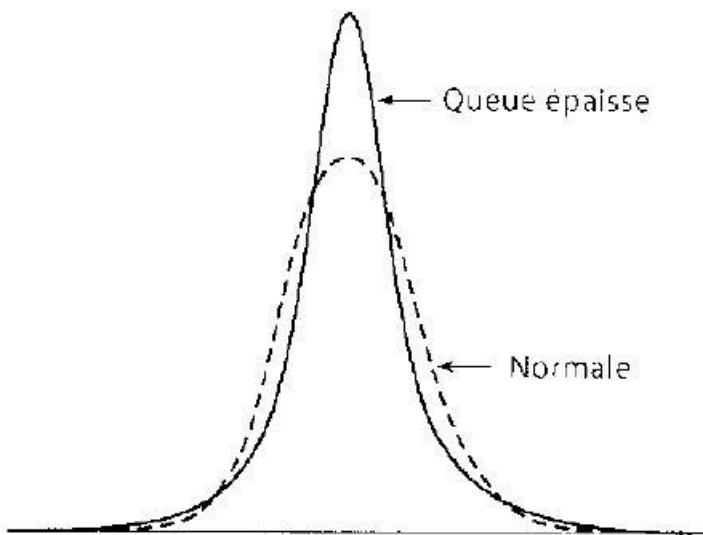


Figure 13 : Comparaison entre une distribution normale et une leptokurtique

Source : Hull, J. (2017). *Gestion des risques et institutions financières*. (P. Gruson, trad.). Montreuil :Pearson.

Hull (2017) nous montre sur la figure 13 (cf. supra « Figure 13 ») la différence entre une distribution normale, souvent utilisée dans les contextes théoriques et une leptokurtique dont les queues de distributions sont plus épaisses et le centre est plus effilé. Cette différence se constate, car la distribution des rendements journaliers n'est pas gaussienne. Cependant, d'un point de vue théorique, le théorème central limite comme énoncé dans le cours d'Engelbeen (2019) nous dit que si une population ne suit pas une distribution normale, la distribution de son échantillon \bar{X} sera normale pour un échantillon suffisamment grand. Le théorème central limite se note comme suit :

$$\bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Leftrightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \approx N(0,1)$$

Dès lors, la distribution sur une période assez longue devrait tendre vers une normale. Néanmoins, Hull (2017) explique que des queues épaisses sont observables sur des périodes suffisamment longues malgré le théorème central limite. Cela est dû à une volatilité variable.

Selon Desagre (2021), en ce qui concerne la forme de la distribution, son coefficient d'aplatissement qui correspond au moment centré d'ordre 4, nommé Kurtose, est supérieur à 3 qui est la valeur étalon pour une distribution normale. On dit qu'elle est leptokurtique ce qui correspond à des extrémités épaisses représentées sur la figure 13 et 14 (cf. supra « Figure 13 », cf. infra « Figure 14 »). Dans la réalité, cela signifie que les évènements extrêmes arrivent plus souvent tels qu'un krach lorsqu'on compare un modèle suivant une distribution normale aux données empiriques.

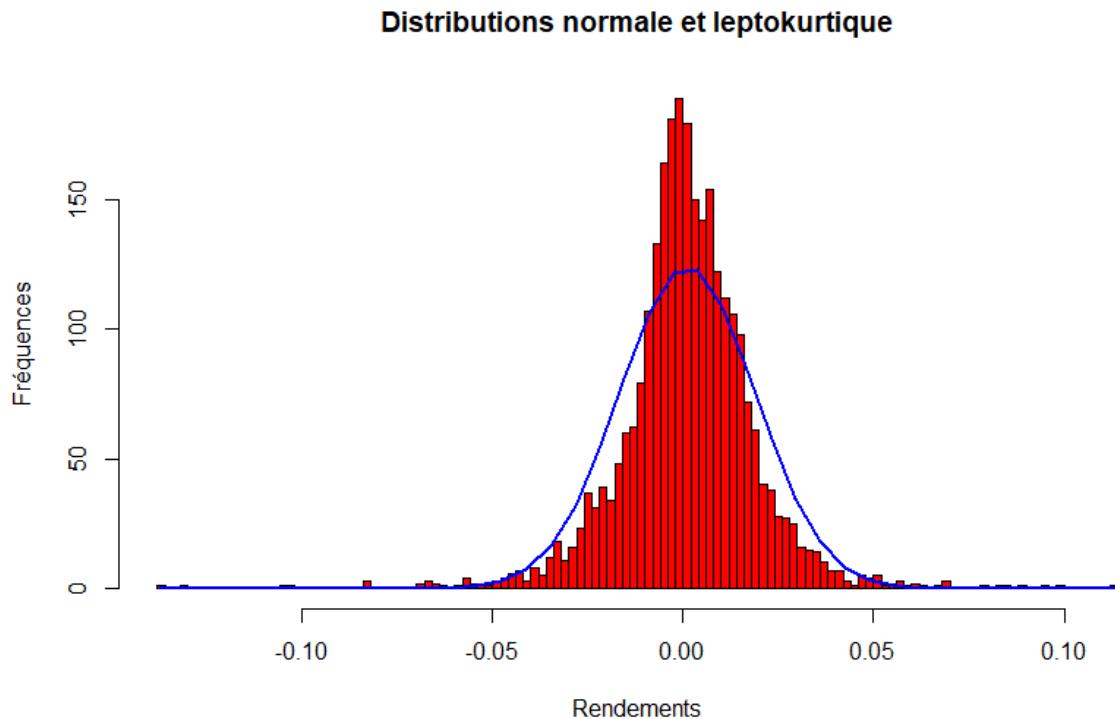


Figure 14 : Comparaison entre une distribution normale et une distribution leptokurtique

Les données de la figure 14 sont issues de l'action Apple entre le 1^{er} janvier 2011 et le 31 décembre 2021. L'histogramme en rouge représente les données empiriques et la courbe bleue est une distribution normale dont les paramètres, moyenne et variance, sont calibrés sur les rendements logarithmiques de l'action Apple. On discerne clairement que l'histogramme est plus haut et effilé que la courbe bleue. On constate également que les queues de distribution sont également plus épaisses que celles de la distribution normale.

c. La myopie de la TMP et autres défauts

Parmi les défauts de la TMP, Cerqueti et Lupi (2017) ajoutent que le premier modèle de Markowitz avait pour défaut les éléments suivants : l'absence de coût de transaction, l'absence de risque de défaut, le risque mesuré par la variance, les rendements mesurés par la moyenne historique et un réglage unipériodique, mais qui a été élargi par la suite en réglage multipériodique grâce à l'introduction d'un temps continu.

Par ailleurs, Kenneth (2017) définit le modèle de la TMP de Markowitz comme l'optimisation de portefeuille de moyenne-variance sur le court terme. Du fait que la TMP est myope sur la période considérée, elle ne peut donc fournir de résultat sur le long terme étant donné qu'elle ne prend pas en compte le changement des opportunités d'investissement dans le temps. De plus, comme la solution de la TMP est focalisée sur une période, elle ne tient pas compte du risque au-delà de cette dernière. Par conséquent, elle ne permet pas à l'investisseur de se couvrir par les nouvelles opportunités qui s'offrent à lui. Toujours selon Kenneth, la TMP n'est valable que sous les conditions cumulatives suivantes : lorsque l'ensemble des investissements possibles est fini, que les rendements sont identiquement et indépendamment distribués et que l'utilité des individus sont logarithmiques. De surcroît, la TMP a un problème intrinsèque. En effet, lorsqu'on inverse la matrice des covariances, les erreurs d'estimation augmentent dans la pondération des actifs. À cela s'ajoute, la fonction quadratique qui par nature, amplifie ces erreurs d'estimation dans les poids.

D'un autre côté, la remise en cause de la théorie de l'utilité espérée par la finance comportementale (cf. infra p.12) s'ajoute au palmarès des défauts de la TMP.

d. Les failles du coefficient de Sharpe

Selon Poncet et Portrait (2017), le ratio de Sharpe connaît quelques défauts. Tout d'abord, il est totalement dépendant du paradigme espérance-variance. Ensuite, dans un cadre ex post (vérifié empiriquement), si les primes de risques sont négatives, alors il n'est pas concluant de comparer divers portefeuilles sur base de ce coefficient. Et enfin, dans la pratique, le gestionnaire tente au mieux de reproduire la performance d'un étalon ou d'un indice.

Pour clôturer ce point, nous avons vu que la TMP présentait des inconvénients que le praticien et l'académicien devaient tenir dans un coin de leur tête lorsqu'ils manipulent ce modèle. Néanmoins, sa simplicité et son approximation font en sorte qu'il soit populaire. En effet, une distribution normale est caractérisée uniquement par ses deux premiers moments d'ordre centré, la moyenne et la variance ce qui est facilement manipulable dans les modèles mathématiques.

5. La gestion de portefeuilles d'actifs

Selon Alphonse et al. (2020), dans la gestion active traditionnelle de portefeuille, l'approche top-down qui est découpée en 3 phases permet au gérant de composer un portefeuille en fonction des objectifs et du profil type de l'investisseur face au risque. Les établissements financiers soumettent un questionnaire afin d'évaluer le profil de l'investisseur. Les profils répertoriés sont les suivants :

- Profil sans risque
- Profil défensif
- Profil conservateur
- Profil neutre
- Profil dynamique
- Profil ambitieux

Chaque profil est défini par l'horizon de temps du placement et par le degré d'aversion au risque de l'investisseur.

Tout d'abord, la première phase nommée l'allocation stratégique définit le type de portefeuille par rapport à un horizon de temps donné et un profil de risque donné. Ensuite, la phase de l'allocation tactique qui consiste en la pondération du portefeuille en tenant compte des objectifs et des contraintes issues de la phase stratégique. Et enfin, la dernière phase dénommée stock picking permet de sélectionner les valeurs nécessaires à la composition du portefeuille grâce à l'approche fondamentale, l'approche par analyse technique et l'approche quantitative.

Finalement, nous comprenons que l'optimisation d'un portefeuille n'est que la dernière étape dans l'élaboration d'un portefeuille par la gestion de patrimoine. Il y a donc lieu de procéder à d'autres analyses au préalable avant de plonger tête baissée dans la composition du portefeuille. Selon Desagre (2021), il existe plusieurs manières de pondérer un portefeuille tel qu'un portefeuille équipondéré, un portefeuille pondéré par les prix ou encore un portefeuille pondéré par la capitalisation de marché. Cependant, celle que nous avons étudiée est la théorie moderne du portefeuille qui est une approche quantitative. Dans la deuxième partie de ce travail, nous conservons l'approche de Markowitz en l'analysant par la théorie des graphes.

Partie II : Sélection d'un portefeuille par l'approche des réseaux

Depuis le papier séminal de Markowitz, beaucoup d'encre a coulé sur le sujet. Après avoir constaté les défauts de la TMP, il est compréhensible que les professionnels du monde de la finance ainsi que le monde académique tel que Merton, Tobin pour n'en citer que quelques-uns, se sont penchés sur cette théorie et ont tenté d'apporter des améliorations. Par exemple, par la méthode d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) qui est le prolongement de la TMP ou encore par le modèle à facteurs. Plus récemment d'autres théories ont vu le jour, notamment la théorie postmoderne du portefeuille (PMPT) qui prend en compte un taux de rendement minimum acceptable, selon Geambasu et al. (2013), ou encore la théorie intertemporelle du portefeuille (IPC) et la théorie digitale du portefeuille (DPT) utilisant le traitement de signaux de basse fréquence pour définir le niveau de risque d'un portefeuille, selon Kenneth (2017).

Bien entendu, il existe moult théories sur la sélection de portefeuille d'actifs financiers. Néanmoins, le sujet de ce mémoire est axé sur l'analyse des réseaux comme outils d'optimisation de la pondération de portefeuille comme alternative à la théorie moderne du portefeuille de Markowitz vue tout au long de la première partie.

1. La théorie des graphes

Pour définir un réseau, il est nécessaire de se prémunir de la théorie des graphes. Pour commencer, nous explorons les constituants d'un graphe. Puis, nous établirons les caractéristiques d'un réseau. Enfin, nous terminerons par les différents types d'algorithme.

a. Les notations

Les notations diffèrent d'un auteur à l'autre. Dans un premier temps, prenons le cours d'Engelbeen (2020) qui définit un graphe G comme suit :

$$G = (V, A, E)$$

Où V est l'ensemble des nœuds (les sommets d'un réseau), A est l'ensemble des arcs (paires orientées de nœuds) et E est l'ensemble des arêtes (paires non-orientées de nœuds).

Prenons l'exemple suivant :

$$V = \{1,2,3\}$$

$$E = \{(1,2);(2,3)\}$$

La figure 15 représente graphiquement notre exemple où le sommet 1 est lié par une arête au sommet 2 et le sommet 2 est lié, également par une arrête, au sommet 3.

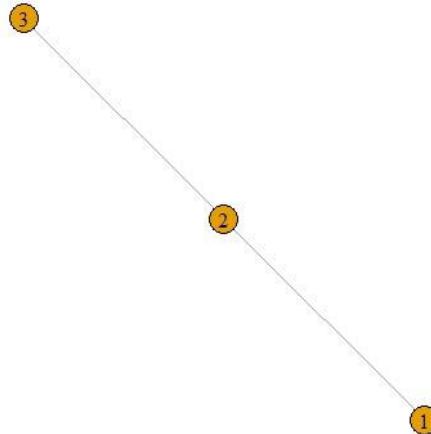


Figure 15 : Graphe non orienté composé des sommets 1,2 et 3

Naturellement, pour des graphes de petites tailles, leurs représentations graphiques et algébriques sont très intuitives. Néanmoins, lorsque le nombre de sommets augmente, cela devient très vite illisible. Pour ce faire, Jackson (2008) propose la notation d'encodage suivante :

$$(N, g)$$

Le graphe est composé d'un ensemble de nœuds $N = \{1,2, \dots, n\}$ et de la matrice d'adjacence g . Les éléments g_{ij} de la matrice g de taille $n \times n$ sont les liens entre les nœuds. Dans un graphe non pondéré, g_{ij} prend les valeurs suivantes :

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe un lien entre le noeud i et j} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans notre exemple, $N = 3$ et la matrice d'adjacence g ressemble à ceci :

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lorsque le graphe est non orienté (composé d'arête), la matrice d'adjacence est symétrique, c'est-à-dire $g_{ij} = g_{ji}$, autrement le graphe est orienté et il est possible que $g_{ij} \neq g_{ji}$. Par

ailleurs, il est également concevable d'associer un poids ou une longueur l_{ij} à l'arc ou à l'arête. Par exemple, la matrice de distance l :

$$l = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ \infty & 0 & \infty \\ \infty & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Par convention, $l_{ij} = \infty$ lorsqu'il n'y a pas de lien entre le sommet i et j . En général, la diagonale est composée de 0, soit $g_{ii} = 0$, afin d'éviter les boucles superflues, sauf si cela a un intérêt dans le problème étudié.

Passons à la notion de chemins, de promenades et de cycles. Une promenade dans un graphe orienté consiste en une séquence de lien $i_1 i_2, \dots, i_{K-1} i_K$ tel que $g_{i_k i_{k+1}} = 1$ pour tout $k \in \{1, \dots, K-1\}$. Un chemin est un cas particulier d'une promenade où les nœuds ne sont pas parcourus plus d'une seule fois et dont on a $i_1 = i$ et $i_K = j$. Un cycle est un cas particulier de promenade dont le nœud qui apparaît plus d'une fois sont les extrémités qui coïncident, $i_1 = i_K$.

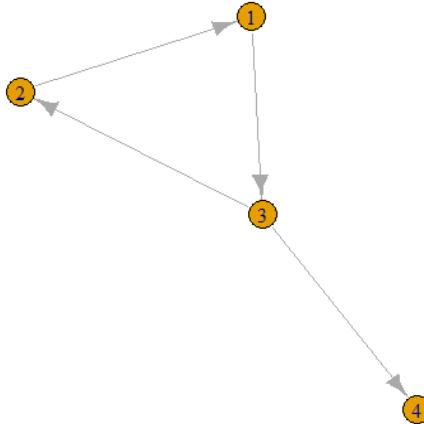


Figure 16 : Promenade, chemin et cycle

La figure 16 illustre un graphe orienté dont une promenade allant du nœud 3 à 4 en passant par 2, 1 et 3. On retrouve également un chemin de 2 à 4 dont les intermédiaires sont 1 et 3. Enfin, nous avons un cycle de 1 à 1 passant par 3 et 2.

b. Les caractéristiques des réseaux et des nœuds

Tout d'abord, définissons quelques caractéristiques d'un réseau sur base du travail de Jackson (2008). Un réseau est connexe si pour chaque paire de nœuds, il existe au moins un chemin qui les lie. Un arbre est un réseau connexe sans cycle et une forêt est un réseau dont les composants sont des arbres. Un composant est un sous-graphe connexe d'un plus grand ensemble. Un arbre couvrant est un arbre qui incorpore tous les nœuds du graphe. Enfin, un arbre couvrant de poids minimal est un graphe non orienté connexe et sans cycle dont on cherche à minimiser le poids total des arêtes.

Les nœuds ont également des caractéristiques intéressantes comme leur regroupement ou leur centralité. Premièrement, le coefficient de regroupement total $Cl(g)$ dans un graphe non orienté mesure en moyenne le nombre de fois qu'un nœud j et un nœud k sont liés dans le réseau, s'ils ont chacun un lien avec le nœud i . On parle dès lors de triplet ij et ik . Nous avons :

$$Cl(g) = \frac{\sum_{i;j \neq i;k \neq j;k \neq i} g_{ij} g_{ik} g_{jk}}{\sum_{i;j \neq i;k \neq j;k \neq i} g_{ij} g_{ik}} \quad (2.1.1)$$

Où, pour rappel, g_{ij} est la i -ème et j -ème valeur de la matrice d'adjacence.

Il existe également le regroupement moyen tel que :

$$Cl^{avg}(g) = \frac{\sum_i Cl_i(g)}{n} \quad (2.1.2)$$

Où $Cl_i(g)$ vaut :

$$Cl_i(g) = \frac{\sum_{j \neq i;k \neq j;k \neq i} g_{ij} g_{ik} g_{jk}}{\sum_{j \neq i;k \neq j;k \neq i} g_{ij} g_{ik}} = \frac{\sum_{j \neq i;k \neq j;k \neq i} g_{ij} g_{ik} g_{jk}}{d_i(g)(d_i(g) - 1)} \quad (2.1.3)$$

$d_i(g)$ est le degré de distribution du nœud i que nous développerons ci-après. L'avantage du regroupement moyen est qu'il porte plus de poids aux nœuds à faible degré de distribution.

Un nœud est caractérisé par sa centralité que Jackson (2008) regroupe selon quatre mesures :

i. Le degré de centralité

Il mesure le niveau de connectivité d'un nœud dans un réseau. Le degré d'un nœud $d_i(g)$ est le nombre de liens que comporte le nœud en question, autrement dit, il s'agit de la cardinalité des nœuds voisins tel que :

$$d_i(g) = \#\{j: g_{ij} = 1\} = \#N_i(g)$$

Où $N_i(g)$ est l'ensemble des nœuds voisins au nœud i . On calcule le degré de centralité de la manière suivante :

$$\frac{d_i(g)}{(n - 1)} \quad (2.1.4)$$

Dont la valeur est comprise entre [0,1].

ii. La proximité

Deux manières sont possibles pour calculer la proximité d'un nœud par rapport à un autre, autrement avec quelle facilité un nœud peut atteindre un autre. La première est de mesurer l'inverse de la distance moyenne entre le nœud i et j tel que :

$$\frac{(n - 1)}{\sum_{j \neq i} l(i, j)} \quad (2.1.5)$$

Où $l(i, j)$ est le nombre de liens sur le plus court chemin entre i et j . La deuxième méthode est la centralité de décroissance d'un nœud en tenant compte d'un paramètre de décroissance $\delta \in]0, 1[$ qui pondère chaque autres nœuds tel que :

$$\sum_{j \neq i} \delta^{l(i, j)} \quad (2.1.6)$$

Lorsque δ approche 0, un poids plus important est donné aux nœuds les plus proches.

iii. L'intermédiarité

La mesure d'intermédiarité se concentre sur l'importance de la position d'un nœud par rapport au nombre de chemins possibles sur lesquels il se situe, c'est-à-dire l'étendue de ses connections avec les autres nœuds. La centralité d'intermédiarité du nœud i est la moyenne du coefficient des géodésiques (également appelé les chemins le plus court) parmi tous les nœuds du réseaux tel que :

$$Ce_i^B(g) = \sum_{k \neq j, i \notin \{k, j\}} \frac{\frac{P_i(kj)}{P(kj)}}{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \quad (2.1.7)$$

Où $P_i(kj)/P(kj)$ est le coefficient des géodésiques, $P_i(kj)$ se comprend comme le nombre de chemins le plus court entre k et j sur lesquels i se situe.

iv. Le prestige des voisins

Le prestige ou la puissance des voisins influencent le nœud étudié. Pour mesurer ce prestige, il existe plusieurs manières. Tout d'abord, le prestige de Katz du nœud i , noté $P_i^K(g)$ qui est défini par la somme du prestige de ses voisins divisé par leur degré respectif. Cette division sert de correction en tenant compte du temps que le nœud j peut allouer à chaque nœud dont il a un lien. Le prestige de Katz se formule de la manière suivante :

$$P_i^K(g) = \sum_{j \neq i} g_{ij} \frac{P_j^k(g)}{d_j(g)} \quad (2.1.8)$$

Même si l'équation fait référence à elle-même, il est possible de trouver une solution. Partant de la matrice d'adjacence normalisée, $\hat{g}_{ij} = \frac{g_{ij}}{d_j(g)}$, dont la somme de chaque colonne vaut 1, la relation (2.1.8) est reformulée comme suit :

$$\begin{aligned} P^K(g) &= \hat{g}P^K(g) \\ \Leftrightarrow (I - \hat{g})P^K(g) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.9) \quad (2.1.10)$$

Où I est la matrice identité. La solution à cette relation est la recherche du vecteur propre unitaire de \hat{g} .

Ensuite, une autre méthode de la mesure de centralité en partant de la relation précédente est le vecteur propre de centralité, noté $C^e(g)$, dont la centralité d'un nœud est proportionnelle d'un facteur λ à la somme de la centralité de ses voisins tel que :

$$\lambda C_i^e(g) = \sum_j g_{ij} C_j^e(g) \quad (2.1.11)$$

Qu'on peut réécrire sous forme matricielle :

$$\lambda C^e(g) = g C^e(g) \quad (2.1.12)$$

Où λ sont les valeurs propres de $C^e(g)$ et $C^e(g)$ est le vecteur propre de g . Les vecteurs propres et les valeurs propres seront explicités au point suivant (cf. infra p.55).

De plus, une autre mesure de centralité dérivée de la précédente est le deuxième prestige de Katz, notée $P^{K2}(g, a)$. Le paramètre $a \in]0, 1[$ représente la pondération d'une promenade selon sa distance passant par un nœud tel que :

$$P^{K2}(g, a) = agI + a^2g^2I + a^3g^3I + \dots \quad (2.1.13)$$

$$\Leftrightarrow P^{K2}(g, a) = (1 + ag + a^2g^2 + \dots)agI \quad (2.1.14)$$

Où la gI est la multiplication matricielle de la matrice d'adjacence et du vecteur unitaire donnant le vecteur de degré d'un nœud. Ce vecteur permet de connaître les promenades de distance 1. En généralisant à g^kI , nous connaissons le nombre de promenade d'un nœud pour une distance k .

Pour une valeur positive, mais faible du paramètre a , la relation (2.1.14) devient :

$$P^{K2}(g, a) = (I - ag)^{-1}agI \quad (2.1.15)$$

Enfin, la centralité de Bonacich, notée $Ce^B(g, a, b)$ est issue du deuxième prestige de Katz et fixe la valeur du paramètre $a = 1$ dont la nature de ce dernier est de représenter la valeur de base de connectivité de chaque nœud. Alors qu'un paramètre positif b est introduit, celui-ci exprime la valeur de connectivité des autres nœuds qui diminue avec la distance.

Ces paramètres seront donc utiles pour définir la nature des réseaux plus complexes à représenter graphiquement.

Pour comprendre l'importance des caractéristiques d'un réseau et l'implication des vecteurs propres, prenons la mesure de périphéricité, noté P , établit par Li, Jiang, Tian, Li et Zheng (2018). Les auteurs ont composé des portefeuilles sur base de cet étalon. Lorsque P est faible, le nœud est centralisé et à l'inverse, quand P est grand, le nœud est situé en périphérie. La mesure de périphéricité est calculée de la sorte :

$$P = \frac{DC^w + DC^u + BC^w + BC^u}{4(N - 1)} + \frac{E^w + E^u + C^w + C^u + EC^w + EC^u}{6(N - 1)}$$

Les indices w et u indiquent les relations respectivement pondérées et non-pondérées.

- DC = degré de centralité (cf. supra p.52)
- BC = l'intermédiarité (cf. supra p.52)

- E = l'excentricité est la distance maximale des chemins le plus court qui relie un nœud i et à un nœud j .
- C = la proximité (cf. supra p.52)
- EC = la centralité des vecteurs propres (cf. supra p.53)

Ils sont donc en mesure de créer des portefeuille efficents sur base de leur périphéricité. Pour ce faire, ils comparent la performance des portefeuilles en utilisant le coefficient de Sharpe, relation (1.3.25) (cf. supra p.33) comme point de comparaison.

c. Les vecteurs propres et les valeurs propres

Le vecteur propre permet de dégager de l'information par rapport à une matrice. Dans le cas de la centralité d'un réseau, notamment le prestige de Katz ou le vecteur propre de centralité, Jackson (2008) nous dit que la plus grande valeur du vecteur propre est associée à un nœud dont le niveau de prestige est le plus important étant donné qu'il s'agit du nombre de promenade le plus élevé dans lequel ce nœud sied.

Considérons un vecteur propre v à droite se définissant de la sorte :

$$Av = \lambda v \quad (2.1.16)$$

Où A est une matrice $n \times n$ et λ est un scalaire, nommé valeur propre. Il est à noter que le vecteur propre peut être à gauche (un vecteur ligne) et à droite (un vecteur colonne). La relation (2.1.16) nous dit que le vecteur propre appliqué à une matrice nous donne le vecteur propre redimensionné par un facteur λ .

Cependant, comme nous l'avons vu au point précédent (cf. supra p.53), le prestige fait référence à lui-même. Dès lors, grâce au théorème de Perron-Frobenius, on pose la valeur propre $\lambda = 1$. S'il existe une matrice stochastique positive A et dont la somme des éléments de chacune de ses colonnes vaut 1, alors le vecteur propre à droite positif v existe et résout la relation (2.1.16) telle que $Av = v$.

Par conséquent, en connaissant la valeur de λ , il est possible de trouver les vecteurs propres par l'équation suivante :

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad (2.1.17)$$

Où I est la matrice identité. Pour que ce système admette des vecteurs solutions non-nuls, il faudrait que son déterminant soit nul. Les solutions de l'équation caractéristique donnent les valeurs propres de A tel que :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

d. Les algorithmes de filtration

Taha (2017) présente des algorithmes pour résoudre divers problèmes sur base de la modélisation des réseaux :

i. *L'arbre couvrant de poids minimal*

L'arbre couvrant de poids minimal lie tous les nœuds au réseau de manière efficiente (c'est-à-dire sans boucle). L'algorithme de Kruskal permet de résoudre ce problème.

ii. *Le problème du plus court chemin*

Le problème du plus court chemin qui définit le chemin le plus court entre un nœud source et un nœud de destination. Ce problème est résolu par l'algorithme de Bellman-Ford lorsqu'il y a des cycles négatifs, par l'algorithme de Dijkstra lorsqu'il n'y a pas de valeur négative sur les arêtes et par l'algorithme de Floyd pour définir la route la plus courte entre n'importe quel nœud dans le réseau.

iii. *Le problème du flot maximum*

Le problème du flot maximum qui détermine la valeur maximale d'un flot en tenant compte des capacités des arcs. Ce problème est résolu par la méthode des flots maximums. Il s'agit d'un cas particulier du problème du flot de coût minimum qui cherche à trouver une solution efficiente à l'utilisation d'un réseau.

iv. *La gestion de projet*

La gestion de projet peut également être modélisée par l'analyse des réseaux. Il existe deux méthodes dans la résolution de ce problème : la méthode du chemin critique qui est utilisée lorsque la durée des activités est déterminée et la technique d'évaluation et de révision des programmes pour des activités dont la durée est probabilisée.

Naturellement pour chaque problème énoncé, il est possible de le résoudre par un programme linéaire. Par ces exemples, nous pouvons appréhender la profondeur des champs d'étude de l'analyse des réseaux.

2. Analyse de la structure des réseaux appliqués aux marchés financiers

L'intérêt de l'étude de la topologie des réseaux, selon Bonanno et al. (2004), est de mettre en lumière certaines propriétés de la structure de corrélation entre les éléments spécifiques d'un système.

Les auteurs étudient plus particulièrement les séries temporelles des actions. Dans le cadre de leur travail, les actions sont les nœuds du réseau et les arêtes sont déterminées par les coefficients de corrélation. Afin de se débarrasser des liens les moins pertinents, il est possible d'appliquer différentes méthodes de filtration. Sans ces filtrations, le réseau est complet et il n'est pas aisément d'en tirer des conclusions. Les auteurs optent pour un arbre couvrant de poids minimal (cf. supra p.56) sur la matrice des distances. Les distances métriques sont extraites à partir de la matrice des corrélations.

La distance métrique entre une paire d'action est donnée par :

$$d_{i,j}(\Delta t) = \sqrt{2(1 - \rho_{ij}(\Delta t))} \quad (2.2.1)$$

Où $\rho_{ij}(\Delta t)$ est le coefficient de corrélation entre deux actions sur un horizon de temps Δt . Il est calculé de la manière suivante :

$$\rho_{ij}(\Delta t) = \frac{\langle r_i r_j \rangle - \langle r_i \rangle \langle r_j \rangle}{\sqrt{(\langle r_i^2 \rangle - \langle r_i \rangle^2)(\langle r_j^2 \rangle - \langle r_j \rangle^2)}} \quad (2.2.2)$$

Avec $r_i = \ln \left(\frac{P_i(t)}{P_i(t-\Delta t)} \right)$. La notation $P_i(t)$ n'est autre que le prix de l'action i à un moment t .

Donc, la matrice d'adjacence sera définie par la matrice des distances et sur laquelle l'arbre couvrant de poids minimal (ACPM) sera appliqué. On comprend que la distance métrique est une notion de centralité dans l'analyse des réseaux.

Suite à cela, les auteurs sont arrivés à la conclusion que la topologie des réseaux dépendait du type d'actif étudié et de l'horizon de temps. Lorsque l'horizon de temps diminue, le réseau

prend une forme d'étoile. Sur la figure 17 (cf. infra « Figure 17 »), le réseau de droite est composé de 100 actions du marché américain sur un horizon de temps journalier (soit 6h30), celui de gauche est composé des mêmes actions, mais sur un horizon de temps de 19,5min. Ce palier a été choisi de manière à ce que chaque action ait été au moins échangée une fois sur l'intervalle de temps étudié.

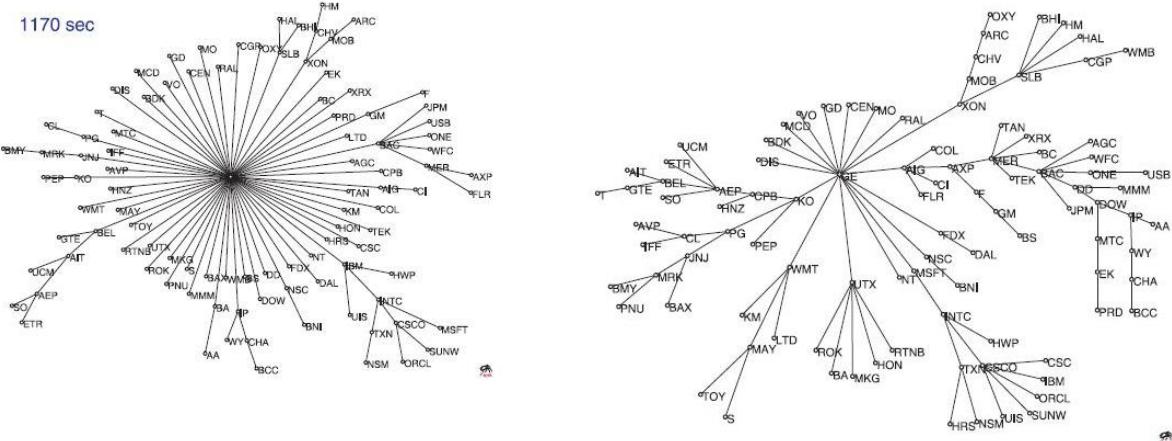


Figure 17: Comparaison de réseaux à différents horizons de temps

Source : Bonanno, G., Caldarelli, G., Lillo, F., Miccichè, S., Vandewalle, N. et Mantegna, R. (2004). Networks of equities in financial markets, *The European Physical Journal B*, 38, 363–371. doi : 10.1140/epjb/e2004-00129-6

Comme on peut le constater le réseau de droite sur la figure 17 est composé de regroupements (cluster en anglais). Il en sort de leur étude que les actions sont regroupées par secteur. Alors que le réseau de gauche prend une forme étoilée avec une action très centralisée, lorsqu'on diminue l'horizon de temps étudié. En comparaison, Jackson (2008) affirme qu'un réseau dont les agents peuvent choisir leur lien sera efficient et maximisera l'utilité pour la société lorsque la topologie du réseau est une étoile, si le coût de maintenance, c , de ces liens est faiblement supérieur au coût de détérioration, δ , tel que : $c > \delta - \delta^2$. Bien entendu, les corrélations ne sont pas choisies dans l'étude d'un marché financier, mais cela permet de mettre en exergue l'importance de la topologie des réseaux et leurs caractéristiques.

Bonano et al. (2004) ont constaté que la fonction de densité de probabilité de la volatilité n'était pas symétrique, contrairement à la fonction de densité de probabilité des rendements, lorsqu'ils considèrent la volatilité comme une proportion entre la valeur maximale atteinte dans la journée et la valeur minimale de cette même journée, dont on ne développera pas le calcul. Par conséquent, les auteurs reproduisent leur étude en se basant sur la corrélation de Spearman qui utilise une échelle ordinnale, permettant ainsi de comparer ces fonctions de densité à l'allure différente. Ils en arrivent à la conclusion que la topologie est semblable à celle dont ils utilisent le coefficient de corrélation de Pearson.

Cependant, les auteurs prolongent leur étude aux indices boursiers où ils ont rencontré des problèmes vis-à-vis des heures d'ouvertures distinctes de chaque bourse et par rapport aux différents taux de change des monnaies. En prenant des horizons de temps d'une semaine pour pallier les décalages d'heures d'ouverture, les auteurs concluent que la topologie diffère des cas précédents.

Concernant le changement de structure suite à une variation de l'horizon de temps, celui-ci s'explique en partie par l'effet d'Epps qui signifie que les corrélations croisées intra secteur diminuent lorsque l'horizon de temps diminue. Une autre observation dans le changement de structure est que les corrélations intra secteur diminuent plus rapidement que les corrélations inter secteur sur un horizon journalier. Ces raisons amènent le réseau à modifier sa structure par regroupement en étoile.

Pour la mise en application, l'accès à un terminal Bloomberg étant très compliqué, Yahoo Finance a été choisi comme alternative pour sa simplicité et la possibilité à automatiser le téléchargement des données. Cependant, les données disponibles sont journalières. L'étude de ce mémoire ne pourra pas être aussi précise que celle des auteurs qui travaillent en intra journalier jusqu'à des périodes de 19,5 min.

Reprendons la méthode de calcul des relations (2.2.1) et (2.2.2) avec un horizon de temps de 252 jours, soit une année d'ouverture boursière selon Desagre (2021), que l'on applique aux 17 actions cotées sur Euronext dont la liste est en annexe (cf infra « Annexe 3 »). Nous obtenons une matrice de distance sur un horizon de 252 jours, notons-le H^{252} pour s'y retrouver. Appliquons un filtre d'ACPM à cette matrice d'adjacence pour ensuite représenter graphiquement par l'application R, le résultat suivant (cf infra « Figure 18 ») :

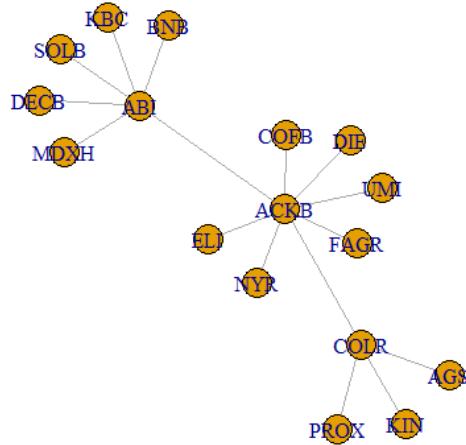


Figure 18 : Réseau Euronext filtré sur 252 jours

Le réseau est constitué de trois regroupements où les actions Ackermans & Van Haaren (ACKB), Anheuser-Busch InBev (ABI) et Colruyt (COLR) sont centralisées. Lorsqu'on diminue la période à une demi-année (H^{126}), nous obtenons le graphique (cf. infra « Figure 19 ») suivant :

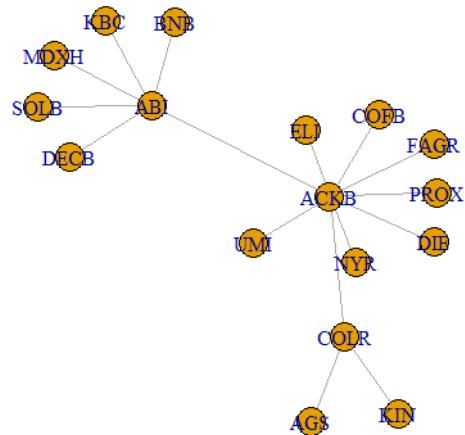


Figure 19 : Réseau Euronext filtré sur 126 jours

On constate qu'il y a toujours trois regroupements, mais le nœud COLR perd un degré de centralité, car le nœud Proximus (PROX) se rattache à ACKB. Le réseau évolue donc au fur et à mesure que l'on modifie l'horizon de temps. Ensuite, à partir d'une filtration à un mois calendrier, soit H^{21} , les regroupements disparaissent et le réseau se rapproche d'une forme d'étoile (cf. infra « Annexe 4 »).

Lorsqu'on fait tendre l'horizon de temps vers 2 jours (H^2), nous ne constatons plus de différence dans la structure du réseau entre l'horizon 2 et 5 jours, soit $H^2 = H^5$ (cf. infra « Annexe 4 »). Cependant, on constate que le nœud ABI récupère deux degrés de centralité supplémentaire par rapport à H^{21} . Néanmoins, le réseau se stabilise principalement autour d'ACKB sous forme d'étoile et d'un petit regroupement autour d'ABI dont on peut voir le résultat sur la figure 20 (cf. infra « Figure 20 ») lorsqu'on prend une période journalière (qui est la plus petite période possible étudiée dans ce travail).

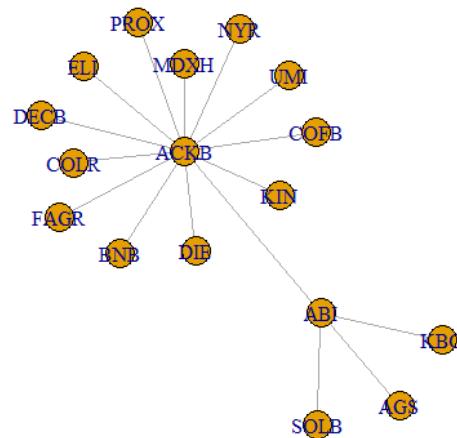


Figure 20 : Réseau Euronext filtré sur une journée

D'après Peralta et Zareei (2016), le risque des actions est composé de deux dimensions. La première est le risque individuel qui n'est autre que la variance du titre, soit la diagonale de la matrice variance-covariance comme nous l'avons vu au point 3.e (cf. supra p.39). La deuxième dimension est le risque systémique lié à l'ensemble du marché suite à un bouleversement inattendu, comme développé au point 3 (cf. supra p.25).

Ils ont constaté que les actifs les plus centralisés étaient ceux qui portaient le risque systémique le plus élevé, alors que le risque des actifs sur la périphérie du réseau est plutôt caractérisé par leur risque individuel. Dans leur analyse, il ressort que les entreprises les plus centralisées dans le réseau sont des entreprises ancestrales dont la trésorerie et la valeur de leur action est faible, mais avec une capitalisation boursière importante. De l'échantillon basé sur le marché américain, les auteurs observent que ce sont principalement les entreprises du secteur financier qui sont centralisés dans le réseau.

Selon Berk et DeMarzo (2020), la capitalisation boursière se calcule comme suit :

$$\text{Capitalisation boursière} = \text{nombre d'action en circulation} \times \text{prix actuel par action} \quad (2.2.3)$$

Cette relation (2.2.3) est utilisée pour définir la capitalisation boursière de chaque entreprise dans l'annexe 3. Notons qu'un prix d'action faible accompagné d'une capitalisation boursière élevée signifie que les entreprises ont énormément d'actions disponibles sur le marché. Un nombre important d'actions qui signifie une part de dividende par action plus faible puisque sa distribution dépend du bénéfice net et du nombre d'actions total, selon Berk et DeMarzo (2020). Néanmoins, dans le cadre de ce travail, nous ne tenons pas compte des dividendes versés par hypothèse, mais cela pourrait être une piste exploratoire si l'on en tenait compte.

En reprenant les données du tableau 2 (cf. infra « Annexe 3 »), les résultats de ce modeste échantillon peuvent être comparés à ceux de Peralta et Zareei (2016). Comme nous l'avons vu sur la figure 20, le regroupement le plus important est autour ACKB qui est une holding présente dans plusieurs secteurs et le deuxième nœud central est ABI qui est un groupe brassicole multinational d'une ampleur importante (cf. infra « Annexe 3 »). Le cas d'ACKB se rapproche le plus des résultats de Peralta et Zareei (2016), si l'on considère la médiane comme point de comparaison pour écarter les valeurs aberrantes. En effet, sa capitalisation boursière s'élève à 33,15 millions d'euro et est supérieure à la médiane. Par contre, le prix de son action est supérieur à la médiane et même à la moyenne. Il s'agit d'une entreprise très pérenne, fondée le 13 décembre 1924, selon Belfirst (2022), et qui est « antérieure » à la médiane et à la moyenne.

Notons que les notions de médiane et de moyenne appliquées à des dates n'ont pas beaucoup de sens, mais l'application Excel attribue une valeur à chaque date, car le programme calcule sa valeur à partir du 1^{er} janvier 1900 comme point de départ. En transformant les dates en valeur, il est possible de les manipuler puis de les reconvertis en date. Cette approximation permet de donner une idée de la vétusté relative des entreprises dans l'échantillon. Par ailleurs, ABI a été fondée le 2 août 1977, d'après Belfirst (2022), qui est une date « postérieure » à la médiane et à la moyenne. Néanmoins, elle est âgée de plus de 55 ans ce qui est assez conséquent lorsqu'on compare l'âge médian du top 10 des entreprises cotées sur le S&P 500 (indice boursier américain) en 2018 qui est de 33 ans (Hillenbrand, P., Kiewell, D., Miller-Cheever, R., Ostojic, I. et Springer, G., 2019).

Citons le dernier paramètre constaté par Perlata et Zareei (2016), une trésorerie faible pour les entreprises les plus centralisées. Concernant ACKB, la trésorerie et les valeurs disponibles, issues de Belfirst (2022), sont inférieures à la médiane et à la moyenne.

Finalement, ACKB remplit donc trois paramètres sur les quatre observés par les auteurs. À l'opposé, ABI n'a qu'un seul paramètre (la capitalisation boursière) sur quatre qui est semblable, si l'on s'en tient à la moyenne. ACKB se situe à la confluence de divers secteurs étant donné qu'il s'agit d'une holding bercée dans le secteur bancaire privé, l'immobilier et l'énergie. Ce n'est donc pas surprenant de la retrouver au centre du regroupement le plus important. Nous rejoignons donc les observations de Peralta et Zareei (2016) sur l'aspect sectoriel et les caractéristiques d'entreprise d'un nœud central. Cependant, ABI est un contre-exemple, mais nous avons constaté une anomalie dans la structure du réseau en passant d'un horizon H^{21} à H^5 et H^2 . Une reproduction des résultats avec un échantillon plus important et des horizons de temps plus petits permettrait d'obtenir des observations plus précises.

Bien entendu, les données du tableau 2 ne sont statistiquement pas significatives vu la taille d'échantillons assez faible, les défauts dans la comparaison des données, comme discuté ci-après et vu l'utilisation de statistiques descriptives simples, comme la médiane ou la moyenne. Les données historiques du nombre d'actions disponibles sont difficilement accessibles. Nous nous contenterons des données actuelles présentes sur Yahoo Finance et partons de l'hypothèse que le nombre d'actions n'a que peu fluctué depuis le début d'année 2022 ce qui n'est pas saugrenu puisqu'il faut suivre des procédures lourdes pour faire des augmentations ou des diminutions de capital. Les autres données du tableau sont calibrées sur l'année 2021 pour rester dans la lignée de l'analyse des cours d'action cotées sur Euronext.

En conclusion, les actions d'un réseau se regroupent par type de secteur ce qui est assez intuitif puisqu'on pourrait imaginer que si le marché va mal pour celui-ci, la majorité des entreprises présentent sur ce segment suivront la même direction. Selon Peralta et Zareei (2016), nous retrouvons principalement des entreprises du secteur financier dans les nœuds centraux ainsi que des vieilles entreprises ayant un cours d'action faible, une trésorerie faible et une capitalisation bancaire importante. La topologie d'un réseau permet donc d'extraire des informations essentielles sur sa nature comme sa forme ou encore les caractéristiques de ses nœuds. Nous avons donc une vague idée du comportement des réseaux, il est temps de passer à l'allocation d'un portefeuille efficient qui sera développé au point suivant.

3. Optimisation de portefeuilles d'actifs par l'approche des réseaux

L'idée générale proposée par Cerqueti et Lupi (2017), est la suivante. Les n actifs X_1, X_2, \dots, X_n sont représentés sur les n nœuds d'un réseau, noté π , et dont la taille des nœuds est proportionnelle à la pondération w_i associée à l'actif X_i . À chaque arc liant un actif X_i à un autre X_j , est associé un coefficient de corrélation des rendements dont la distance $d_{i \rightarrow j}$ entre ces deux actifs est inversément proportionnelle à leur dépendance. Il est également nécessaire de définir une fonction $v(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ qui établit l'existence de ce lien lorsque la valeur vaut 1, sinon 0. La figure 21(cf. supra « Figure 21 ») illustre un graphe orienté, pondéré et dont les sommets sont proportionnels au poids qui est attribué dans les quatre actifs.

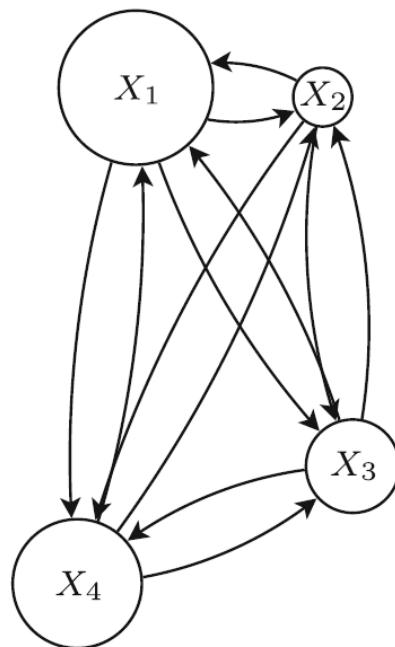


Figure 21 : Représentation d'un portefeuille sous la forme d'un réseau

Source :Cerqueti, R. et Lupi, C. (2017). A Network Approach to Risk Theory and Portfolio Selection. [Chapitre de livre]. Dans *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance* (pp.73-82). Cham : Springer. doi : 10.1007/978-3-319-50234-2_6

a. Méthodologie de l'analyse

Partons de ce principe et adaptons-le à nos besoins pour modéliser notre approche.

Par hypothèse (cf. supra p.18) dans ce travail, la structure de dépendance entre deux actifs est mesurée par le coefficient de corrélation linéaire. Par conséquent, les réseaux étudiés ne seront

pas orientés. En effet, la corrélation linéaire est supposée être identique dans les deux sens, soit $v(i,j) = v(j,i)$ et $d_{i \rightarrow j} = d_{j \rightarrow i}$. Dès lors, la matrice d'adjacence est symétrique. La relation entre deux actifs n'est pas considérée comme causale, si les liens ne sont pas orientés, selon Peralta et Zareei (2016).

Comme nous l'avons vu au point 2 (cf. supra p.57), d'après Bonanno, et al. (2004), la distance métrique issue de la matrice de corrélation est un outil connu de la littérature scientifique pour détecter de l'information économique dans un réseau. Nous utilisons donc la relation (2.2.1) sur laquelle nous appliquons un filtre d'un ACPM. La valeur de la distance métrique est comprise entre zéro et deux, soit $d_{i,j}(\Delta t) \in [0,2]$. Lorsque la valeur est proche de zéro, $d_{i,j}(\Delta t) = 0$, la corrélation vaut 1 ce qui signifie que les actifs sont parfaitement corrélés. Si la distance métrique vaut deux, $d_{i,j}(\Delta t) = 2$, alors la corrélation est parfaitement corrélée négativement. Les rendements des actifs suivront des variations opposées. Finalement, si les actifs ne sont pas corrélés, on obtient $d_{i,j}(\Delta t) = \sqrt{2}$. L'application du filtre d'un ACPM (cf. supra p.56) écartera les valeurs avec le moins d'importance, également appelé le bruit et cherchera les valeurs minimales sur les arêtes, c'est-à-dire, les actifs les plus corrélés. Ceci permettra de mettre en avant l'aspect de la centralité puisque les actifs ayant les corrélations les plus intenses se situeront au centre du réseau. La matrice des distances servira donc de matrice d'adjacence pour la suite de ce travail.

Enfin, la taille des sommets est donc proportionnelle aux poids injectés dans l'actif. La couleur orange du nœud signifie que le poids est positif et la couleur rouge signale un poids négatif. Ces poids négatifs se traduisent par une position à découvert (cf. supra p.25) par l'investisseur qui vend les actifs les moins rentables.

b. Élaboration des stratégies

Dans la même idée que Peralta et Zareei (2016), plusieurs stratégies sont comparées par leur coefficient de Sharpe qui définit l'excès de rendement par unité de risque (cf. supra p.36) et dont on a également développé les défauts (cf. supra p.46). Malgré un taux sans risque négatif en date du 31 décembre 2021, les actifs BNB, MDXH et NYR ont une prime de risque négative. Néanmoins les portefeuilles issus des différentes stratégies ont un ratio de Sharpe positif.

Dans un premier temps, les stratégies minv et mv, développées au point 3.e.ii de la première partie (cf. supra p.41) sont appliquées au réseau dans son ensemble. D'après Peralta et Zareei (2016), une stratégie dite naïve qui consiste à pondérer les actifs de manière équitable, soit $\frac{1}{N}$, serait tout aussi efficace que les stratégies de Markowitz. Elle est donc incluse également dans l'analyse complète du réseau.

Ensuite, la centralité du vecteur propre, ν , (cf. supra p.55) est utilisée pour définir le niveau d'influence de chaque actif. Deux valeurs étalons ont été conservées pour comparer les différentes stratégies : $\nu = 0,4$ et $\nu = 0,25$. L'ensemble des actifs est donc divisé en sous-groupes, d'une part, les actifs possédant une centralité de vecteur propre supérieure à l'étalon et d'autre part, les actifs dont la centralité de vecteur propre en est inférieure. À partir de ces sous-ensembles, les stratégies minv, mv et naïves sont appliquées. La stratégie naïve équilibre les actifs centralisés lorsque $\nu > 0,4$. Dans le cas de la centralité faible, $\nu \leq 0,4$, l'équilibrage est réalisé sur les actifs situés en périphérie. À cela s'ajoute une stratégie de pondération des actifs proportionnellement à la valeur de la centralité du vecteur propre. Par exemple, dans la condition $\nu > 0,4$, l'actif le plus centralisé (la plus haute valeur de ν) aura un poids plus important que les autres actifs centralisés. La comparaison de deux étalons de centralité de vecteur propre permet de comprendre l'influence de ce paramètre dans l'allocation des poids dans les actifs, mais également son lien avec le stock picking, c'est-à-dire, la sélection de titres éligibles dans le portefeuille. Notons que le risque lié à la diversification devient incompressible à partir d'une composition de 30 titres (cf. supra p.25). 17 titres ont été sélectionnés dans ce travail, il serait donc intéressant d'approfondir l'étude avec un échantillon plus important pour mieux appréhender la relation de la centralité de vecteur propre avec la sélection de titres.

Finalement, les résultats des différentes stratégies sont répertoriés dans le tableau 3 (cf. infra « Annexe 5 ») dont une conclusion sera réalisée.

c. Stratégies appliquées sur le réseau

i. *Stratégie MinV*

La stratégie de minimum variance dont le ratio de Sharpe s'élève à 18,69, est illustrée par la figure 22. La pondération se concentre principalement sur la Banque Nationale de Belgique et Cofinimmo. Elle est également épargnée entre les actifs périphériques situés sur deux regroupements. Le regroupement autour de KBC se rapproche du secteur financier avec la BNB et AGS. Notons que l'action de KBC est fortement vendue à découvert pour investir dans d'autres actifs.

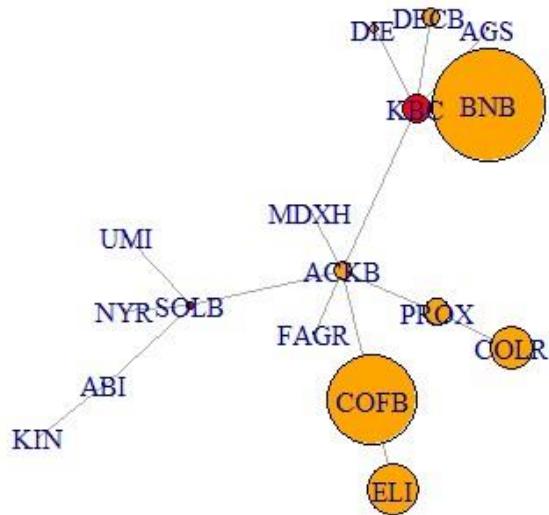


Figure 22 : Stratégie MinV sur le réseau complet

ii. Stratégie MV

Le coefficient de Sharpe est globalement stable, oscillant entre 52,95 et 53,02. Par ailleurs, en comparant la figure 23, où un taux de rendement a été fixé à 10% et à la figure 24, où il a été fixé à 20%, on constate que les proportions dans les actifs sont presque similaires.

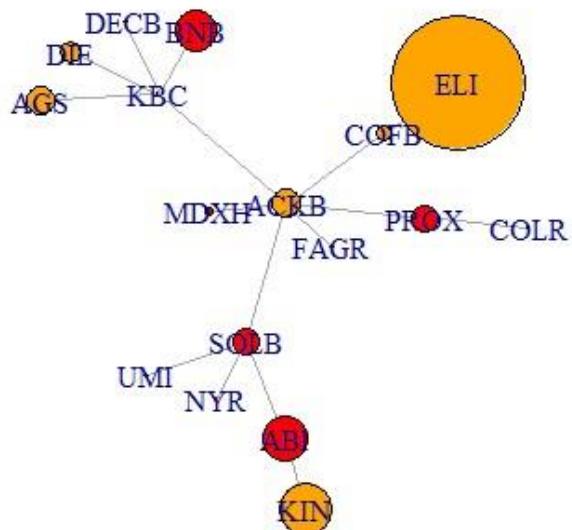


Figure 23 : Stratégie MV (Re = 10%) sur le réseau complet

D'un point de vue topologique, la stratégie investit énormément dans l'actif d'Elia Group (ELI) ainsi que plusieurs autres actifs en périphérie. Notons qu'une partie de la pondération est accordée dans l'actif centralisé d'Ackermans & Van Haaren (ACKB). La vente à découvert est aussi répartie dans le réseau.

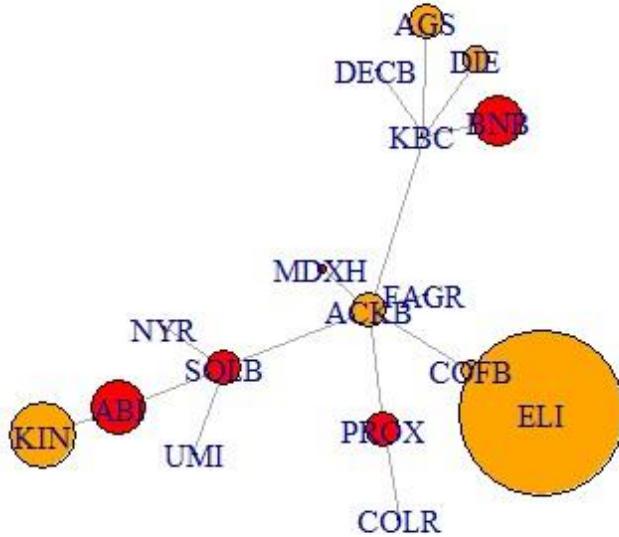


Figure 24 : Stratégie MV ($Re = 20\%$) sur le réseau complet

iii. Stratégie Naïve

Comme expliqué précédemment (cf. supra p.65), la stratégie naïve distribue équitablement les pondérations entre chaque actif. La figure 40 (cf. infra « Annexe 6 ») a été intégrée dans les annexes pour ne pas alourdir le travail étant donné qu'elle ne présente que peu d'intérêt graphiquement. Cependant, elle sert de modèle de référence avec un coefficient de Sharpe s'élevant à 16,71.

Le point suivant compare les stratégies basées sur une centralité de vecteur propre à hauteur de 0,4.

d. Stratégies basée sur la centralité de vecteur propre ($\nu = 0,4$)

La centralité de vecteur propre a été choisie comme mesure de la centralité des nœuds dans le réseau. Les valeurs pour chaque actif sont reprises dans le tableau 4 (cf. infra « Annexe 7 »). En instaurant de manière arbitraire une valeur $\nu = 0,4$, les actifs se répartissent en deux

catégories. D'un côté, les actifs dont la centralité est supérieure à 0,4 forment l'ensemble des 6 éléments suivants : $EC_H(0,4) = \{"ACKB", "SOLB", "FAGR", "KBC", "MDXH", "PROX"\}$. De l'autre, les actifs ayant une centralité inférieure ou égale à 0,4 forment le sous-ensemble :

$$EC_L(0,4) =$$

$\{"ABI", "COLR", "UMI", "KIN", "DECB", "COFB", "DIE", "ELI", "BNB", "AGS", "NYR"\}$ qui est composé de 11 éléments. Appliquons les différentes stratégies à ces sous-ensembles.

i. Stratégie MinV $EC_H(0,4)$

La stratégie de minimum variance appliquée au sous-ensemble forme une étoile où les actifs les plus investis sont Proximus (PROX) et ACKB. De plus, comme dans le cas de la stratégie appliquée au réseau entier, KBC est vendu à découvert. Contrairement à cette stratégie, la topologie est différente, car le volume est concentré au centre, alors que la figure 22 (cf. supra p.67) se répartit sur la périphérie de deux regroupements et une partie au centre. Notons que le ratio de Sharpe est plus faible dans la stratégie MinV $EC_H(0,4)$, soit 10,88 que celle appliquée à l'entièreté du réseau.

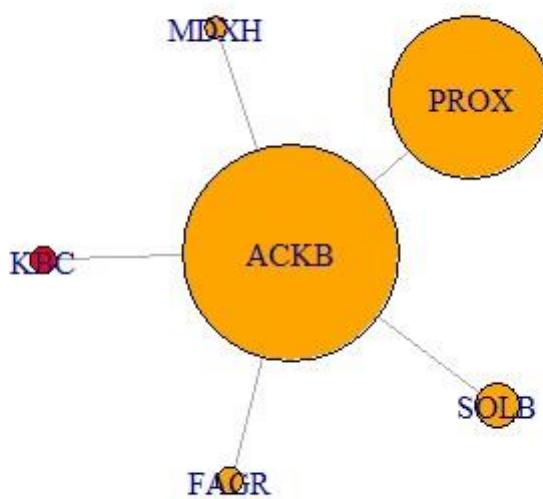


Figure 25 : Stratégie MinV sur $EC_H(0,4)$

ii. Stratégie MV $EC_H(0,4)$

Étant donné que la stratégie MV se situe sur le portefeuille tangentiel (cf. supra p.36), le ratio de Sharpe est identique pour chaque taux de rendement fixé et s'élève à 19,34. Dès lors, la

volatilité évolue proportionnellement au taux de rendement. À titre de comparaison, la figure 42 (cf. infra « Annexe6 ») de la stratégie MV à un taux fixé à 20% se trouve en annexe.

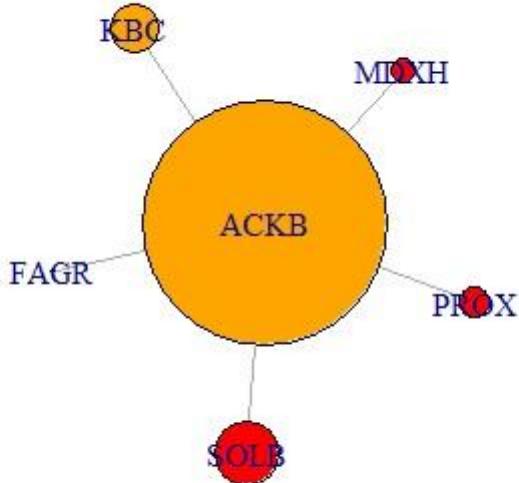


Figure 26 : Stratégie MV ($Re = 10\%$) sur $EC_H(0,4)$

D'un point de vue topologique, le réseau de la figure 26 se regroupe en une étoile comme le cas précédent. Contrairement à la stratégie sur le réseau complet, la proportion attribuée aux actifs est très concentrée sur le nœud central, ACKB. Cependant, les mêmes actifs sont vendus à découvert que dans la stratégie appliquée sur le réseau entier.

iii. Stratégie Naïve $EC_H(0,4)$

La répartition se fait de manière équitable entre les nœuds centraux du réseau, illustré par la figure 31 (cf. infra « Annexe 6 »). Son ratio de Sharpe est de 9,02 ce qui est inférieur à sa stratégie sœur. Comme expliqué par Peralta et Zareei (2016) les nœuds centraux sont caractérisés par un risque systémique plus important que ceux en périphérie. Cette stratégie se traduit par une plus haute volatilité et un rendement plus faible (cf. infra « Annexe 5 »).

iv. Stratégie Pondérée $EC_H(0,4)$

La pondération est donc proportionnelle à la centralité du nœud. La figure 27 montre que cette stratégie forme également une étoile. ACKB ayant la plus haute valeur de centralité est donc le

nœud le plus pondéré. Tout comme la stratégie naïve, la vente à découvert n'est pas présente. Néanmoins, le ratio de Sharpe de la stratégie pondérée s'élève à 11,69 et est supérieur à celui de la stratégie naïve, malgré un poids plus important concentré sur l'élément central du réseau.

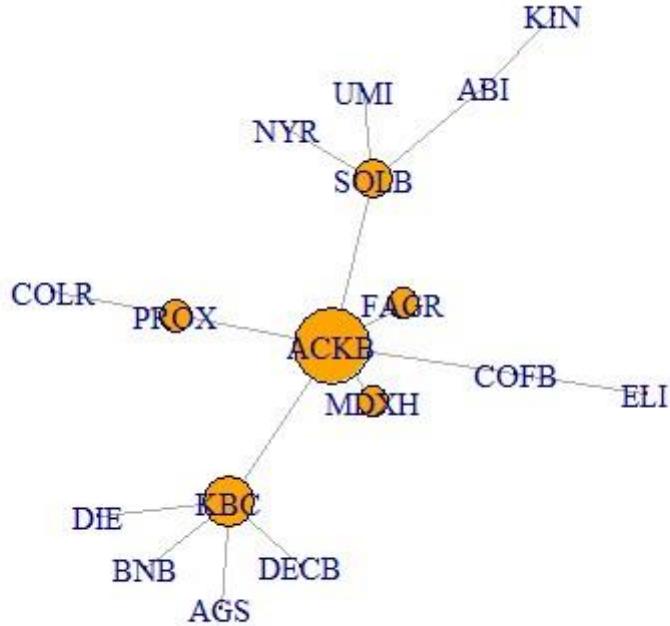


Figure 27 : Stratégie pondérée sur $EC_H(0,4)$

Les points suivants développent les stratégies liées à l'ensemble $EC_L(0,4)$.

v. Stratégie MinV $EC_L(0,4)$

Contrairement à la topologie des stratégies sur l'ensemble $EC_H(0,4)$, la figure 28 montre un réseau allongé avec des petits regroupements autour d'AGS et de COFB. Ceci pourrait s'expliquer par la nature du sous ensemble $EC_L(0,4)$ puisqu'il s'agit de nœuds peu corrélés entre eux regroupés en un nouvel ensemble. Parallèlement à la stratégie MinV sur le réseau entier (cf. supra p.66), on constate que la majorité de la pondération est réalisée sur les nœuds périphériques en combinaison avec la vente à découvert d'un actif centralisé.

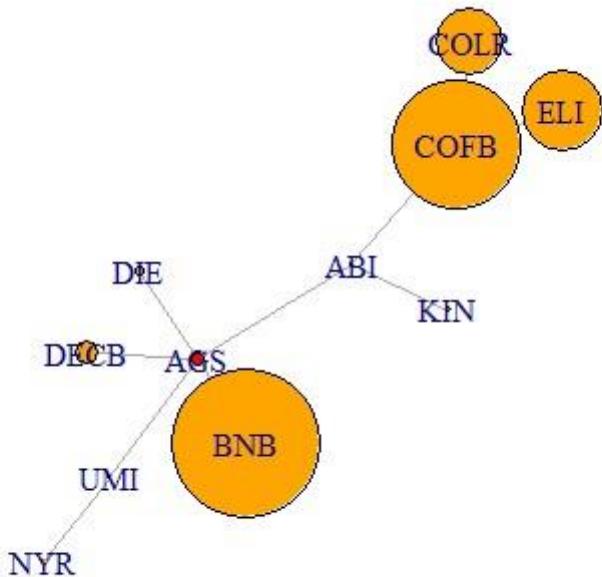


Figure 28 : Stratégie MinV sur $EC_L(0,4)$

Notons que cette stratégie obtient le plus faible ratio de Sharpe s'élevant à 0,24 avec une volatilité qui explose à hauteur de 62,42%. Cependant, la volatilité semble surprenante, des vérifications supplémentaires doivent être apportées.

vi. Stratégie MV $EC_L(0,4)$

Tout comme son corollaire $EC_H(0,4)$ (cf. supra p.69), le coefficient de Sharpe de la stratégie MV $EC_L(0,4)$ est identique pour chaque niveau de rendement fixé, soit 50,96. Néanmoins, sa forme est différente. La figure 29 montre une topologie par regroupement où la pondération est répartie de la même manière que la stratégie MV sur le réseau total (cf. supra p.66). Similairement, les deux stratégies ont ABI et BNB en vente à découvert et une proportion importante dans l'actif ELI.

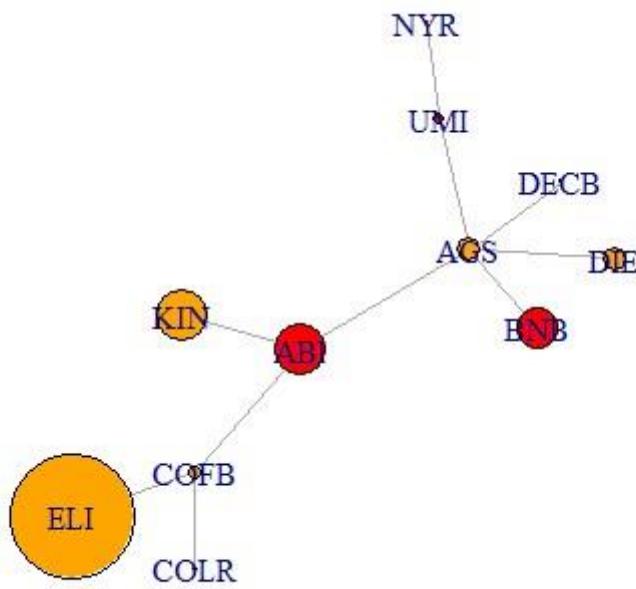


Figure 29 : Stratégie MV ($Re = 10\%$) sur $EC_L(0,4)$

vii. *Stratégie Naïve $EC_L(0,4)$*

À nouveau, cette stratégie représente une pondération répartie équitablement entre les nœuds considérés comme sur la figure 44 (cf. infra « Annexe 6 »). Dans ce cas-ci, le ratio de Sharpe vaut 19,72 qui est plus important que celui de la stratégie naïve $EC_H(0,4)$ (cf. supra p.70). Une répartition équitable entre les nœuds périphériques apporte un ratio de Sharpe plus intéressant que la répartition équitable entre les nœuds centraux. Selon Peralta et Zareei (2016), un portefeuille efficient devrait associer des poids plus importants aux nœuds périphériques qu’aux nœuds centraux.

viii. *Stratégie Pondérée $EC_L(0,4)$*

La stratégie pondérée $EC_L(0,4)$ présente un coefficient de Sharpe équivalant à 16,75 qui est supérieur à celui de la stratégie pondérée $EC_H(0,4)$ (cf. supra p.70), mais inférieur à celui de la stratégie naïve $EC_L(0,4)$. Dans le prolongement de cette étude, la stratégie « inverse » comme attribuer une pondération plus importante aux nœuds les moins centralisés, pourrait apporter des informations complémentaires. Ici, sur la figure 30, le noeud de l’ensemble $EC_L(0,4)$ ayant la valeur de centralité la plus élevée (cf. infra « Annexe 7 ») reçoit la pondération la plus importante, soit COFB.

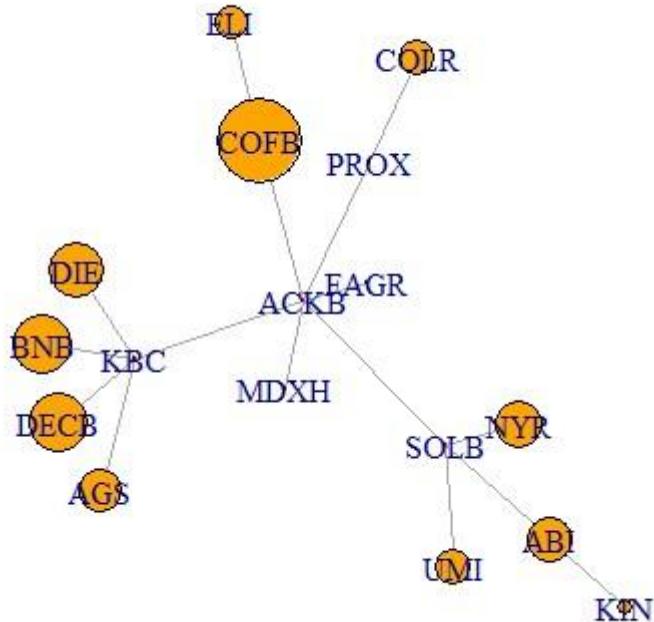


Figure 30 : Stratégie pondérée sur $EC_L(0,4)$

Comme le seuil v a été établi de manière arbitraire, il est nécessaire de prendre une autre valeur afin d'avoir un point de comparaison. Notons que la valeur $v = 0,25$ est également arbitraire.

e. Stratégies basée sur la centralité de vecteur propre ($v = 0,25$)

Dans cette partie, le sous-ensemble des actifs de la valeur de centralité strictement supérieur à 0,25 est composé de :

$$EC_H(0,25) =$$

$\{"ACKB", "SOLB", "DECB", "COFB", "DIE", "BNB", "FAGR", "KBC", "MDXH", "PROX"\}$ et le sous-ensemble des actifs dont la valeur inférieure ou égale à 0,25 est $EC_L(0,25) = \{"ABI", "COLR", "UMI", "KIN", "ELI", "AGS", "NYR"\}$.

i. Stratégie MinV $EC_H(0,25)$

Contrairement à la stratégie MinV $EC_H(0,4)$ (cf. supra p.69), la topologie affichée sur la figure 31, n'est pas en forme d'étoile, mais en deux regroupements comme celle de la stratégie MinV appliquée au réseau entier (cf. supra p.66). Cependant, son coefficient de Sharpe est à peu près identique à celui de MinV $EC_H(0,4)$ pour une valeur de 10,87.

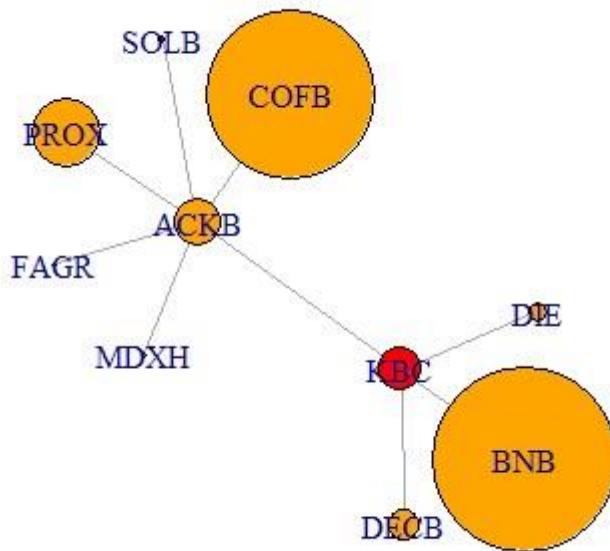


Figure 31 : Stratégie MinV sur $EC_H(0,25)$

ii. Stratégie MV $EC_H(0,25)$

L'approche de la stratégie MV $EC_H(0,25)$ a un coefficient de Sharpe s'élevant à 27,51 qui est supérieur à celui de la stratégie MV $EC_H(0,4)$. Comme ce dernier, ces ratios de Sharpe sont proportionnels au taux de rendement fixé, dès lors les compositions de portefeuilles pour différents niveaux de rendement sont semblables. Un graphique avec un rendement fixé à 20% se trouve dans les annexes pour comparaison (cf. infra « Annexe 6 »). À l'opposé, la stratégie MV $EC_H(0,25)$ sur la figure 32 n'est pas en forme d'étoile, mais plutôt regroupée en deux sous-groupes où ACKB et KBC sont centrés.

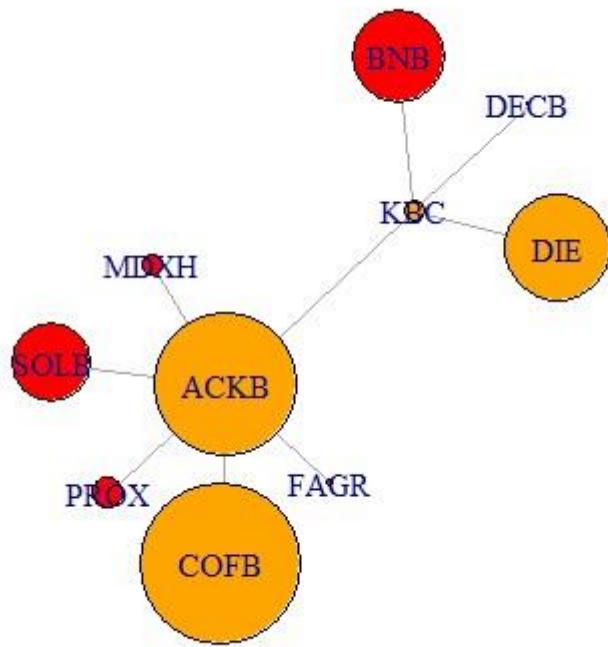


Figure 32 : Stratégie MV ($Re = 10\%$) sur $EC_H(0,25)$

iii. Stratégie Naïve $EC_H(0,25)$

La topologie de cette stratégie est représentée par la figure 46 (cf. infra « Annexe 6 »). L'intérêt réside dans le coefficient de Sharpe d'une valeur de 12,88 qui est supérieur à celui de la stratégie naïve $EC_H(0,4)$, mais inférieur aux stratégies naïves $EC_L(0,25)$ et $EC_L(0,4)$.

iv. Stratégie Pondérée $EC_H(0,25)$

D'un point de vue topologique, la figure 33 de cette stratégie est semblable à la figure 27 de la stratégie pondérée sur $EC_H(0,4)$. Son ratio de Sharpe s'élève à 13,69 et bat ceux des stratégies pondérées $EC_H(0,4)$ et $EC_L(0,25)$.

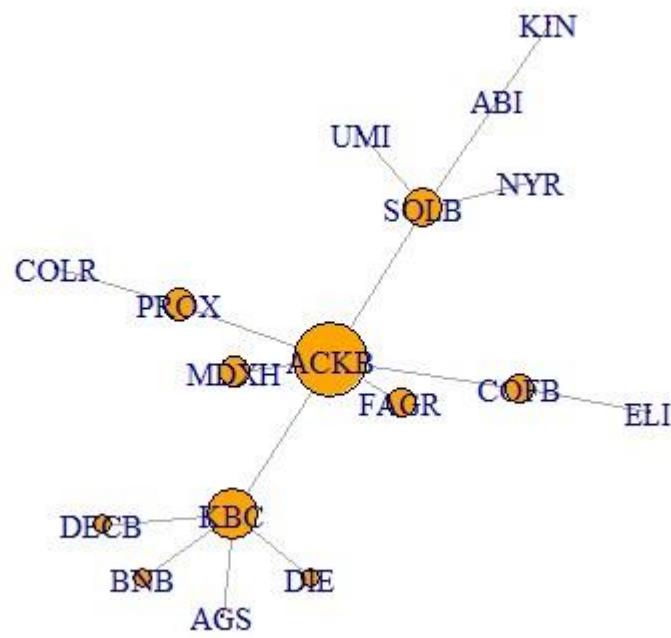


Figure 33 : Stratégie pondérée sur $EC_H(0,25)$

v. Stratégie MinV $EC_L(0,25)$

La figure 34 représente la topologie de la stratégie qui se rapproche de la topologie de la stratégie MinV $EC_L(0,4)$. Son coefficient de Sharp s'élève à 0,45 et est plus élevé que celui de la stratégie MinV $EC_L(0,4)$. Notons que sa volatilité atteint une valeur surprenante de 64,32%. De plus amples calculs sont nécessaires pour en faire ressortir des conclusions plus pertinentes.

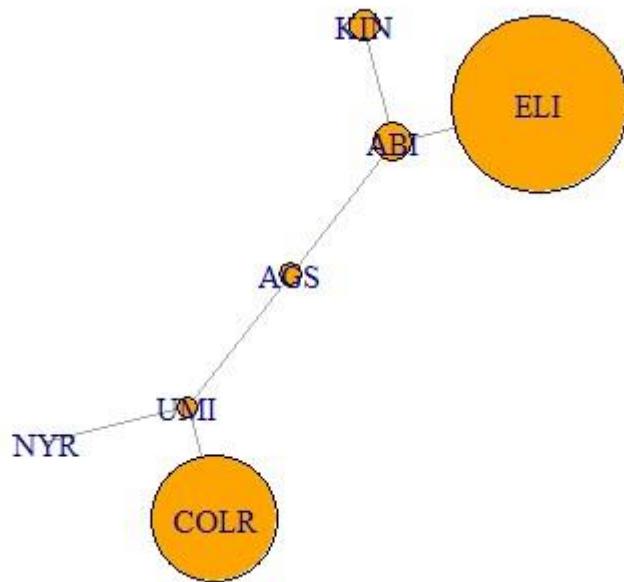


Figure 34 : Stratégie MinV sur $EC_L(0,25)$

vi. Stratégie MV $EC_L(0,25)$

À nouveau, le coefficient de Sharpe est identique pour les différents niveaux de rendement souhaités. Son ratio de Sharpe s'élève à 48,96 ce qui est inférieur à celui de la stratégie MV $EC_L(0,4)$. La figure 35 est comparable à la figure 47 (cf. infra « Annexe 6 »). Néanmoins, elle est plus étirée que celle de la stratégie MV $EC_H(0,25)$.

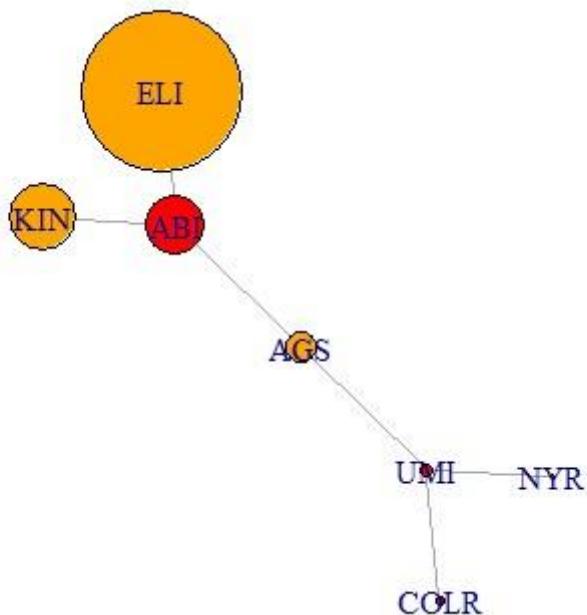


Figure 35 : Stratégie MV ($Re = 10\%$) sur $EC_L(0,25)$

vii. Stratégie Naïve $EC_L(0,25)$

La représentation graphique de cette stratégie est représentée par la figure 48 (cf. infra « Annexe 6 »). En matière de coefficient de Sharpe, il s'agit de la deuxième meilleure stratégie naïve. Il s'élève à 17,45.

viii. Stratégie Pondérée $EC_L(0,25)$

D'un point de vue de la comparaison de son coefficient avec les autres stratégies pondérées, elle n'obtient que la troisième place avec une valeur de 12,89. La figure 36 représente la topologie de cette stratégie. Contrairement à la stratégie pondérée $EC_L(0,4)$, il n'y a pas de nœud qui sorte du lot en termes de pondération. Bien entendu, cela dépend de la distribution du niveau de centralité du vecteur propre de l'ensemble des actifs.

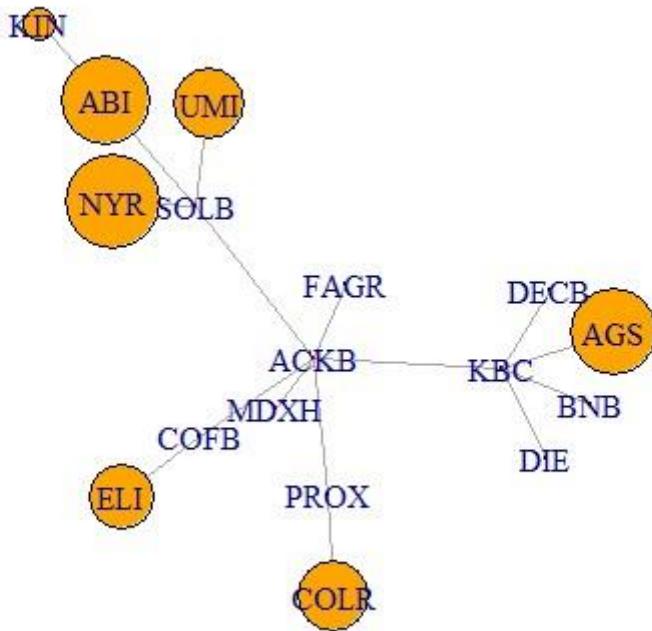


Figure 36 : Stratégie pondérée sur $EC_L(0,25)$

f. Conclusion

L'objectif est de comprendre l'importance de la centralité d'un nœud dans les dimensions moyenne-variance d'un portefeuille efficient. Peralta et Zareei (2016) ont constaté une relation négative entre la centralité d'un réseau qu'ils assimilent au risque systémique et l'allocation optimale d'un portefeuille. En excluant la stratégie MV qui est la plus efficiente dans chaque cas, nous obtenons le tableau 2 :

Tableau 2 : Récapitulatif des stratégies (hors MV)

Eigenvector centrality	Stratégies	Excès de rendement	Volatilité	Coefficient de Sharpe
N/C	MinV	13,03%	0,70%	18,69
N/C	Naïve	17,42%	1,04%	16,71
EC = 0,4	ECp > 0,4	15,28%	1,31%	11,69
EC = 0,4	ECn > 0,4	12,02%	1,33%	9,02
EC = 0,4	ECp < 0,4	17,00%	1,01%	16,75
EC = 0,4	ECn < 0,4	20,37%	1,03%	19,72
EC = 0,4	MinV, EC > 0,4	12,11%	1,11%	10,88
EC = 0,4	MinV, EC < 0,4	14,97%	62,42%	0,24
EC = 0,2	ECp > 0,2	15,48%	1,13%	13,69
EC = 0,2	ECn > 0,2	13,66%	1,06%	12,88
EC = 0,2	ECp < 0,2	17,94%	1,39%	12,89
EC = 0,2	ECn < 0,2	22,04%	1,26%	17,45
EC = 0,2	MinV, EC > 0,2	8,09%	0,74%	10,87
EC = 0,2	MinV, EC < 0,2	29,06%	64,32%	0,45

La stratégie ayant le meilleur résultat pour le coefficient de Sharpe (19,72) est la stratégie naïve $EC_L(0,4)$, illustrée par la figure 44 (cf. infra « Annexe 6 »). Cette stratégie alloue de manière équitable des poids aux actifs périphériques dont la valeur de la centralité du vecteur propre est inférieure à 0,4, soit $v \leq 0,4$. La stratégie, analogue, $EC_L(0,25)$ a un coefficient de Sharpe équivalent à 17,45. Cette diminution peut se traduire par un manque de possibilités puisqu'il n'y a que 7 éléments dans le sous-ensemble de $EC_L(0,25)$ par rapport à 11 éléments dans le sous-ensemble $EC_L(0,4)$. Une étude plus approfondie serait donc nécessaire pour en ressortir des informations significatives.

Dans le cadre des stratégies naïves et pondérées, la détermination du seuil influence fortement leurs coefficients de Sharpe selon où l'on se situe dans la condition. Pour les sous-ensembles inférieurs à 0,4, soit $EC_L(0,4)$, il en ressort que les ratios de Sharpe sont plus élevés que ceux des sous-ensembles supérieurs à 0,4, soit $EC_H(0,4)$. Cet écart diminue entre les sous-ensembles $EC_L(0,25)$ et $EC_H(0,25)$, lorsque le seuil diminue de 0,4 à 0,25. À nouveau, les données pourraient être biaisées à cause de la taille de l'échantillon.

Ensuite, concernant les stratégies MV, le coefficient de Sharpe est systématiquement plus élevé lorsqu'on sélectionne les sous-ensembles périphériques, autrement dit $EC_L(0,25)$ et $EC_L(0,4)$, que les sous-ensembles centraux, soit $EC_H(0,25)$ et $EC_H(0,4)$. En effet, cela est dû à une surpondération dans l'actif ELI qui a un ratio de Sharpe individuel très élevé par rapport aux autres et qui s'élève à hauteur de 39,20. Les coefficients de Sharpe de chaque actif sont répertoriés dans le tableau 6 (cf. infra « Annexe 8 »). Étant donné que cet actif n'est pas repris dans les sous-ensembles $EC_H(0,25)$ et $EC_H(0,4)$ puisque sa centralité vaut 0,15, ces stratégies affichent des ratios de Sharpe plus faibles. Ce cas démontre que la nature individuelle de l'actif joue également un rôle important.

Pour finir, il est difficile d'extraire des informations catégoriques à partir des résultats à cause de la taille de l'échantillon. Il est dès lors nécessaire de conduire une étude plus approfondie avec un échantillon plus important. Néanmoins, nous pouvons constater que la centralité d'un nœud joue un rôle dans la détermination des pondérations et que les caractéristiques individuelles influencent également la nature du portefeuille. Le seuil devrait être également étudié pour définir des sous-ensembles efficents.

Conclusion générale

La théorie moderne du portefeuille de Markowitz est au cœur de la finance moderne malgré ses défauts. Son utilisation relativement simple et accessible en fait un modèle de choix dans le monde professionnel. Néanmoins, la recherche pousse toujours plus loin les limites des modèles. La littérature scientifique sur l'analyse des réseaux est en plein essor. Ce mémoire a pour objectif de comparer la topologie des réseaux à la théorie classique.

Pour ce faire, il a été nécessaire de déployer un modèle simplifié par rapport à la littérature spécialisée. La matrice des distances métriques a été réalisée sur base de la matrice des corrélations linéaires pour servir de matrice d'adjacence du réseau. Sur base de cette dernière, un filtre d'arbre couvrant de poids minimal a été appliqué afin de se séparer du bruit. Ensuite, la centralité de vecteur propre qui permet d'attribuer une valeur à la centralité de chaque nœud est définie. En fixant, un seuil à la centralité de vecteur propre, deux sous-ensembles sont créés, l'un composé d'actifs très centralisés et l'autre composé d'actifs situés sur la périphérie du réseau. À ces sous-ensembles, diverses stratégies d'optimisation de poids ont été utilisées pour comprendre comment les portefeuilles se comportaient sur les réseaux.

Concernant les résultats, ceux-ci sont peu significatifs à cause de l'échantillon qui n'est pas assez diversifié, mais également à cause de sa petite taille. Par ailleurs, les cours journaliers ont été manipulés dans ce mémoire, alors que les auteurs travaillaient avec des données intra journalières allant même jusqu'à des horizons de temps de 19,5min. Dès lors, une étude plus profonde permettrait de mieux définir le paramètre de seuil choisi arbitrairement dans ce travail.

Néanmoins, une stratégie dite naïve, c'est-à-dire, une distribution équitable entre les actifs, appliquée à un réseau définit sous le seuil de 0,4, soit $EC_L(0,4)$, présente un coefficient de Sharpe plus important que ceux des stratégies variance minimale (MinV) et naïve sur le réseau complet. Pour autant que cette différence soit également significative, cela laisse à suggérer que la topologie du réseau a un rôle dans la définition du couple rendement-risque. Selon Peralta et Zareei (2016), les actifs centralisés sont caractérisés par le risque systémique et les actifs périphériques portent plutôt leur risque individuel. D'ailleurs, la stratégie moyenne-variance (MV) comportait un ratio de Sharpe plus élevé pour les sous-ensembles périphériques, $EC_L(0,25)$ et $EC_L(0,4)$ que les sous-ensembles centralisés, $EC_H(0,25)$ et $EC_H(0,4)$, car l'aspect individuel prenait le pas. En effet, l'action ELI qui a le ratio de Sharpe individuel le plus élevé ($SRi = 39,20$) a une centralité faible ($v = 0,15$) et qui se situe dans les sous-ensembles $EC_L(0,25)$ et $EC_L(0,4)$. Par conséquent, la stratégie MV attribue un poids très important à cet actif ce qui explique la différence de coefficient de Sharpe d'un sous-ensemble à l'autre. Ceci illustre bien l'importance des caractéristiques individuelles.

Cette méthode qui est définie par un seuil arbitraire dans le cadre de ce travail devrait être appliquée à un échantillon le plus grand possible afin d'isoler les actions périphériques et donc les moins corrélées. Cette stratégie s'accorderait plus à la phase d'allocation tactique et de définir les actions à prendre en compte dans le portefeuille. Il semblerait judicieux de déployer en parallèle une autre stratégie pour définir les pondérations, comme certaines d'entre elles ont été explorées dans ce travail. Une autre piste serait l'implémentation d'autres paramètres, notamment la mesure de périphéricité développée par Li et al. (2018) ou encore la stratégie ρ -dépendante de Peralta et Zareei (2016) qui m'ont inspiré pour travailler sur un seuil de la centralité de vecteur propre.

Notons que la structure de corrélations des actifs considérée dans ce mémoire est la corrélation linéaire qui est simple et intuitive, mais qui atteint ses limites lorsque les corrélations sont asymétriques. Il est alors possible de pousser l'étude plus loin en envisageant différents types d'actifs et sur des horizons de temps différents grâce à des modèles mathématiques plus complexes tels que les copules.

En conclusion, la topologie des réseaux permet d'extraire des informations sur les relations entre éléments d'un réseau. La centralité d'un nœud joue un rôle important dans la définition du risque systémique et donc dans la composition du portefeuille. Certains paramètres pourraient être mieux définis par une étude plus intensive sur un échantillon important. Une révision de la corrélation des actifs permettrait d'ouvrir un champ plus vaste grâce à l'apport de mathématiques plus adéquates pour les corrélations asymétriques.

Bibliographie

- Aftalion, F., Poncet, P. et Portrait, R. (1998). *Que sais-je ? La théorie moderne du portefeuille*. Paris : Presses universitaires de France.
- Alphonse, P., Desmuliers, G., Grandin, P. et Levasseur, M. (2020). *Gestion de portefeuille et marchés financiers* (2^e éd.). Montreuil : Pearson.
- Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 17(3), 21-86. doi : 10.24033/asens.476
- Belfirst. (2022). *L'accès instantané aux données des entreprises belges et luxembourgeoises*. Récupéré le 12 août 2022 de <https://belfirst-r1.bvdinfo.com/version-20220629-2733-31/Home.serv?product=belfirstneo&>
- Berk, J. et DeMarzo, P. (2020). *Corporate Finance* (5^e éd.). Harlow : Pearson.
- Beste, A., Leventhal, D., Williams, J. et Lu, Q. (2002). *The Markowitz Model Selecting an Efficient Investment Portfolio*. Récupéré de <https://www.semanticscholar.org/paper/The-Markowitz-Model-Selecting-an-Efficient-Beste-Leventhal/cc37b8db6f787e4fb05a27dac0a8a177893411b3>
- Bonanno, G., Caldarelli, G., Lillo, F., Miccichè, S., Vandewalle, N. et Mantegna, R. (2004). Networks of equities in financial markets, *The European Physical Journal B*, 38, 363–371. doi : 10.1140/epjb/e2004-00129-6
- Brada, J., Ernst, H. et Van Tassel, J. (1966). Letter to the Editor—The Distribution of Stock Price Differences: Gaussian After All?. *Operations Research*, 14(2), 334-340. doi : 10.1287/opre.14.2.334
- Cayatte, J. (2009). *Microéconomie de l'incertitude* (2^e éd). Bruxelles : De Boeck.
- Cerqueti, R. et Lupi, C. (2016). Risk measures on networks and expected utility. *Reliability Engineering and System Safety*, 155, 1-8. doi : 10.1016/j.ress.2016.04.017
- Cerqueti, R. et Lupi, C. (2017). A Network Approach to Risk Theory and Portfolio Selection. [Chapitre de livre]. Dans *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance* (pp.73-82). Cham : Springer. doi : 10.1007/978-3-319-50234-2_6
- Chaboud, A., Chiquoine, B., Hjalmarsson, E. et Vega, C. (2014). Rise of the Machines: Algorithmic Trading in the Foreign Exchange Market. *The Journal of Finance*, 69(5), 2045-2084. doi : 10.1111/jofi.12186
- Chollet, P. (2021). Gestion d'un portefeuille titres. [Chapitre de livre]. Dans *Gestion de patrimoine: Stratégies juridiques, fiscales et sociales* (pp. 366-390). Paris: Dunod. doi : 10.3917/dunod.thauv.2021.01.0366
- Desagre, C. (2021). *Marchés et Risques Financiers*. Syllabus. Ihec, Bruxelles.
- Devolder, P. (2011). *Calcul stochastique*. Syllabus. UCL, Louvain-La-Neuve.
- Devolder, P., Fox, M. et Vaguener, F. (2018). *Mathématiques financières* (3^e éd). Montreuil : Pearson.
- D'Hondt, C. et Platten, I. (2015). *Les principes de la finance*. Syllabus. UCL, Louvain-La-Neuve.
- Engelbeen, C. (2019). *Mathématique et statistique 2*. Syllabus. Ihec, Bruxelles.
- Engelbeen, C. (2020). *Introduction à la recherche opérationnelle*. Syllabus. Ihec, Bruxelles.
- Estran, R., Harb, É. & Veryzhenko, I. (2017). Chapitre 2. Préférences et utilités. Dans *Gestion de portefeuille* (pp. 37-57). Paris : Dunod.
- Fan, J. (2019). *Financial Econometrics*. Syllabus. Princeton University, Princeton.

- Fernando, J. (2022). *Sharpe Ratio*. Récupéré le 27 juillet 2022 de <https://www.investopedia.com/terms/s/sharperatio.asp>
- Fontaine, P. et Hillion, P. (1992). Le modèle d'évaluation par l'arbitrage, l'ATP (Arbitrage Pricing Theory), *Journal de la société statistique de Paris*, 133(4), 141-160. Récupéré de http://www.numdam.org/item/JSFS_1992_133_4_141_0.pdf
- Geambasu, C., Sova, R., Jianu, I. et Geambasu, L. (2013). Risk measurement in post-modern portfolio theory : differences from modern portfolio theory, *Journal of Economic computation and economic cybernetics studies and research*, 1. Récupéré de http://www.ecocyb.ase.ro/nr_2013_pdf/Geambasu%20Cristina,%20Robert%20Sova.pdf
- Gustavo, P. et Zareei, A. (2016). A network approach to portfolio selection, *Journal of Empirical Finance*, 38, 157-180. doi : 10.1016/j.jempfin.2016.06.003
- Hillenbrand, P., Kiewell, D., Miller-Cheevers, R., Ostojic, I. et Springer, G. (2019). *Traditional company, new businesses : The pairing that can ensure an incumbent's survival*. McKinsey & Company. Récupéré de <https://www.mckinsey.com/~/media/McKinsey/Industries/Electric%20Power%20and%20Natural%20Gas/Our%20Insights/Traditional%20company%20new%20businesses%20The%20pairing%20that%20can%20ensure%20an%20incumbents%20survival/Ttraditional-company-new-businesses-VF.ashx>
- Hudson, R. et Gregoriou, A. (2010). *Calculating and Comparing Security Returns is Harder than you Think: A Comparison between Logarithmic and Simple Returns*. SSRN. doi : 10.2139/ssrn.1549328
- Hull, J. (2017). *Gestion des risques et institutions financières*. (P. Gruson, trad.). Montreuil :Pearson.
- Hull, J. (2017). *Options, futures et autres actifs dérivés* (10^e édition).(P. Roger, C. Hénot et L. Deville). France : Pearson.
- Jackson, M. (2008). *Social and economic networks*. New Jersey :Princeton University Press.
- Kenneth, J. (2017). Modern Portfolio Theory, Digital Portfolio Theory and Intertemporal Portfolio Choice. *American Journal of Industrial and Business Management*, 7, 833-854. doi : 10.2139/ssrn.2956060
- Kirkpatrick, C. et Dahlquist, J. (2011). *Technical Analysis* (2^e édition). New Jersey : Pearson Education.
- Li, Y., Jiang, X., Tian, Y., Li, S. et Zheng, B. (2018). Portfolion optimization based on network topology. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 515(1), 671-681. doi : 10.1016/j.physa.2018.10.014
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 1(7), 77-91. doi : 10.2307/2975974
- Markowitz, H. (1992). L'histoire de la finance moderne, *Journal de la société statistique de Paris*, 133(4), 13-33. Récupéré de http://www.numdam.org/item/?id=JSFS_1992_133_4_13_0
- Mukherji, S. (2011). The capital asset pricing model's risk-free rate, *The international Journal of Business and Finances Research*, 2(5), 75-83, Récupéré de https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1876117
- Peralta, G. et Zareei, A. (2016). A network approach to portfolio selection. *Journal of Empirical Finance*, 38, 157-180. doi : 10.1016/j.jempfin.2016.06.003
- Poncelet, P. et Portrait, R. (2017). La théorie moderne du portefeuille : théorie et applications. [Chapitre de livre]. Dans Rocchi, J. (dir.), *MBA Finance* (2^e édition, pp.783-815). Paris : Eyrolles.

- Quantivity. (2021). *Why Log Returns*. Récupéré le 9 juillet 2022 de <https://quantivity.wordpress.com/2011/02/21/why-log-returns/>
- Steele, M. (2010). Chapitre 3 : Brownian Motion. [Chapitre de livre]. Dans *Stochastic Calculus and Financial Applications* (pp. 29-33). New-York : Springer.
- Taha, H. (2017). Chapter 6 : Network model. [Chapitre de livre]. Dans *Operations Research an introduction* (10^e édition, pp.247-285). Edinburgh : Pearson.
- Vaguener, F. (2011). *Statistiques I et II Introduction à l'économétrie*. Syllabus. ICHEC, Bruxelles.
- Von Neumann, J. et Morgenstern, O. (1953). Chapter 1 : Formulation of the economic problem. [Chapitre de livre]. Dans *Theory of games and economic behavior* (3^e édition, pp.8-31). Interbooks.
- Wiersema, U. (2008). *Brownian Motion Calculus*. Chichester : John Wiley & Sons Ltd.

Compléments bibliographiques

- Sharpe, W. (1994). The Sharpe Ratio. *The Journal of Portfolio Management*.
Récupéré de <http://web.stanford.edu/~wfsharpe/art/sr/sr.htm>